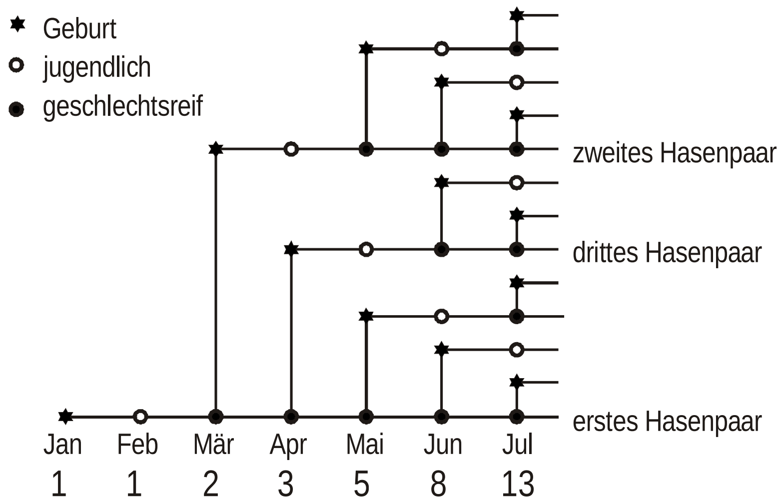
Die Fibonacci-Folge

Leonardo von Pisa, Sohn des Bonacci, genannt «Fibonacci[1]». 1180 – 1250.
In seinem Hauptwerk *Liber Abaci* führte Fibonacci in Europa die indisch-arabischen Ziffern ein.

Auf seine berühmte Folge stiess Fibonacci beim Studium des Wachstums einer Kaninchenpopulation.

Folgende Vorschrift soll gelten:

1. Zu Beginn gibt es ein Paar neugeborener Kaninchen.
2. Jedes neugeborene Kaninchenpaar wirft, beginnend mit dem zweiten Monat, jedes Monat ein neues Paar.



Die *Fibonacci-Folge* erhält man, indem man, beginnend mit «1, 1», jeweils die vorangehende Zahl addiert.
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, …

Mit jeweils drei aufeinander folgenden Zahlen der Fibonacci-Folge kann man interessante Proportionen aufstellen:

2 – 3 – 5 $\underbrace{2 \qquad 3}_{5}$ 2 : 3 ≈ 3 : 5 3 · 3 ≈ 2 · 5 9 ≈ 10	3 – 5 – 8 $\underbrace{3 \qquad 5}_{8}$ 3 : 5 ≈ 5 : 8 5 · 5 ≈ 3 · 8 25 ≈ 24	5 – 8 – 13 $\underbrace{5 \qquad 8}_{13}$ 5 : 8 ≈ 8 : 13 8 · 8 ≈ 5 · 13 64 ≈ 65
8 – 13 – 21 $\underbrace{8 \qquad 13}_{21}$ 8 : 13 ≈ 13 : 21 13 · 13 ≈ 8 · 21 169 ≈ 168	13 – 21 – 34 $\underbrace{13 \qquad 21}_{34}$ 13 : 21 ≈ 21 : 34 21 · 21 ≈ 13 · 34 441 ≈ 442	a – b – (a + b) $\underbrace{a \qquad b}_{a + b}$ «Goldener Schnitt» falls gilt: a : b = b : (a + b)

[1] Fibonacci = Filius des Bonacci.

Eine Strecke wird im *goldenen Schnitt* geteilt falls gilt:

kleinerer Abschnitt : grösserer Abschnitt = grösserer Abschnitt : Gesamtlänge

Je weiter man in der Fibonacci-Folge fortschreitet, desto genauer erfüllen drei aufeinander folgende Zahlen der Fibonacci-Folge diese Bedingung.

3 5 $\underbrace{\qquad\qquad}_{8}$	$\frac{3}{8} = 0.375$ $\frac{5}{8} = 0.625$ $\underbrace{\qquad\qquad}_{1}$	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ $\underbrace{\qquad\qquad}_{1}$

Die Bedingung für den goldenen Schnitt ist <u>genau</u> erfüllt, wenn – bei einer Gesamtlänge von 1 – der kleinere Abschnitt $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ und der grössere Abschnitt $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ beträgt.

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} : \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} : 1 \qquad \text{mit 2 multiplizieren}$$

$$(3-\sqrt{5}) : (\sqrt{5}-1) = (\sqrt{5}-1) : 2 \qquad \text{Produkt der Aussenglieder gleich Produkt der Innenglieder}$$

$$(\sqrt{5}-1)^2 = 2(3-\sqrt{5})$$

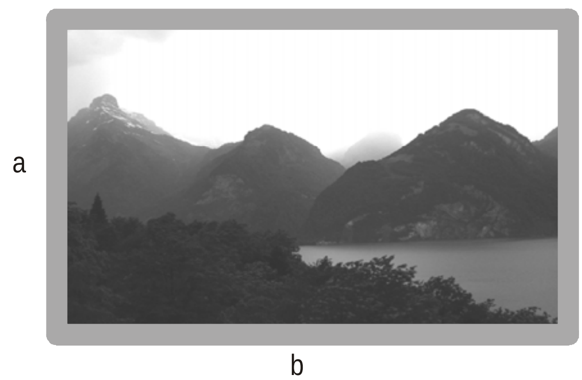
$$5 - 2\sqrt{5} + 1 = 6 - 2\sqrt{5}$$

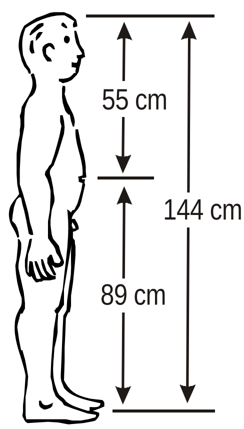
$$6 - 2\sqrt{5} = 6 - 2\sqrt{5} \qquad \text{was zu beweisen war}$$

$$\text{kleinerer Abschnitt : grösserer Abschnitt} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} : \frac{\sqrt{5}-1}{2} = (3-\sqrt{5}) : (\sqrt{5}-1) = 1 : \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} : 1$$

$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.382$ $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$ $\underbrace{\qquad\qquad}_{1}$	1 $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618$ $\underbrace{\qquad\qquad}_{1 + \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 2.618}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$ 1 $\underbrace{\qquad\qquad}_{\frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1 \approx 1.618}$

Das «perfekte» Bildformat folgt dem goldenen Schnitt.
a : b = b : (a + b)

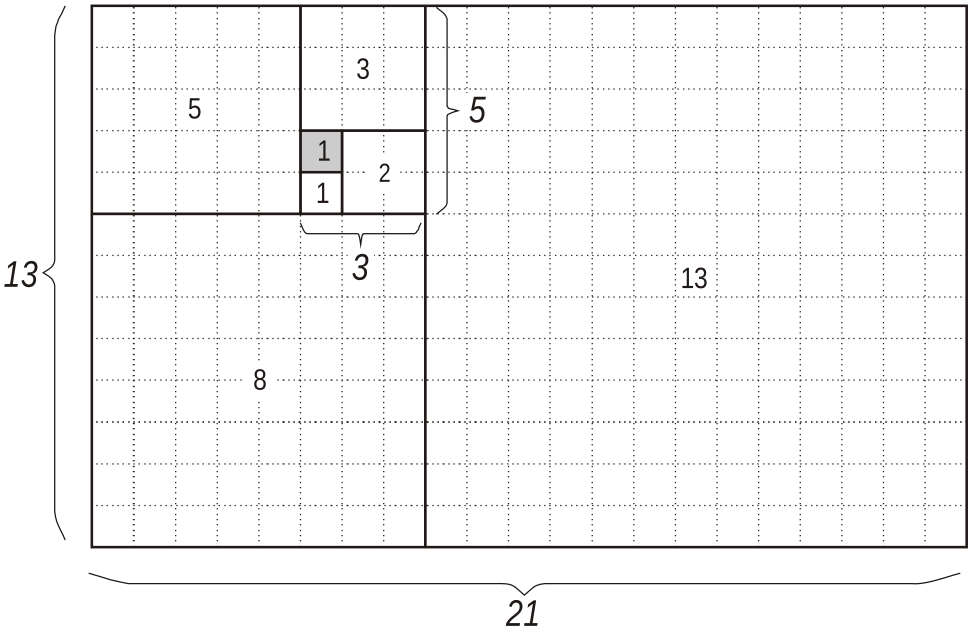




Auch dieser Knabe ist geradezu «klassisch» nach dem goldenen Schnitt gebaut: Der Bauchnabel teilt seine Körpergrösse nach dem goldenen Schnitt.

55 : 89 = 89 : 144

Durch folgendes Verfahren kann man, so nach und nach, das «perfekte» Rechteck im goldenen Schnitt erhalten:



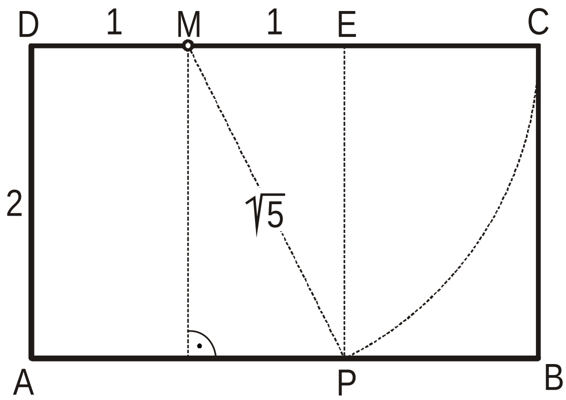
Mit nebenstehender Konstruktion kann ein exaktes «goldenes» Rechteck konstruiert werden:

AD = 2, DM = ME = 1 (APED ist ein Quadrat)

MP = $\sqrt{2^2 + 1^2}$ = $\sqrt{5}$

Damit ist DC = 1 + $\sqrt{5}$

Es gilt: 2 : (1 + $\sqrt{5}$) = (1 + $\sqrt{5}$) : (3 + $\sqrt{5}$)
wie man leicht nachprüfen kann



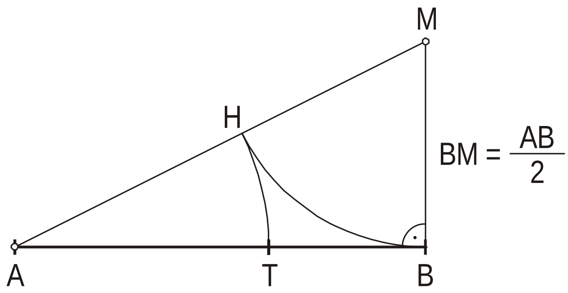
Die Strecke AB ist im goldenen Schnitt zu teilen.

BM ist die Hälfte der Strecke AB.

Wählt man AB = 2, so ist BM = 1 und AM = $\sqrt{5}$

AT = AH = $\sqrt{5}$ – 1

TB = 2 – ($\sqrt{5}$ – 1) = 3 – $\sqrt{5}$



Nun die Proportion: TB : AT = AT : AB

$$\left(3-\sqrt{5}\right) : \left(\sqrt{5}-1\right) = \left(\sqrt{5}-1\right) : 2$$

$$\left(\sqrt{5}-1\right)^2 = 2\left(3-\sqrt{5}\right)$$

$$5 - 2\sqrt{5} + 1 = 6 - 2\sqrt{5}$$

$$6 - 2\sqrt{5} = 6 - 2\sqrt{5}$$ was zu zeigen war

Die Zahlen der Fibonacci-Folge tauchen auch in folgenden *Kettenbrüchen* auf:

$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}} = \frac{1}{1+\frac{3}{5}} = \frac{5}{8}$$

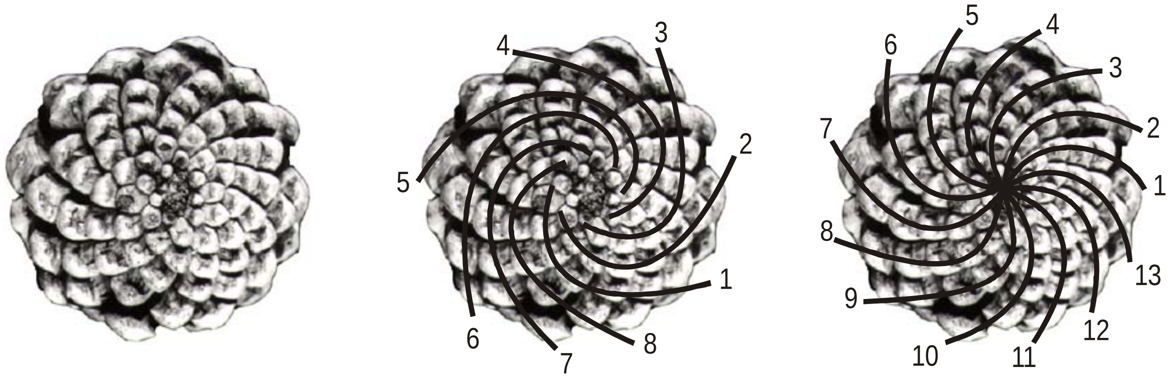
$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}}} = \frac{1}{1+\frac{5}{8}} = \frac{8}{13}$$

Interessanterweise gibt es eine Formel zur Berechnung der Fibonacci-Zahlen:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]$$

Formel von *Jacques Philippe Marie Binet* 1843

Die Natur hat die Finonacci-Folge längst entdeckt. In den Spiralen von Tannenzapfen, Sonnenblumen, Kakteen und Ananas kann man sie entdecken.



8 Spiralen in die eine Richtung, 13 Spiralen in die andere.

Der «Fibonacci-Trick»

Mit diesem Trick kannst du deine Überlegenheit im Kopfrechnen unter Beweis stellen. Du zeichnest sechs Kästchen. Dein «Gegner» soll in die ersten beiden Kästchen zwei beliebige Zahlen schreiben, dann in das jeweils folgende Kästchen die Summe der beiden vorhergehenden Kästchen und schliesslich sollen alle sechs Zahlen addiert werden. Er darf auch einen Taschenrechner verwenden.

Du bist viel schneller, denn du weisst, dass die Summe aller sechs Kästchen gleich vier mal der Wert des Kästchens Nr. 5 beträgt.

1	2	3	4	5	6	Summe 1 – 6
2	7	9	16	25	41	100

$$4 \cdot 25 = 100$$

Das liegt an einer Eigenschaft der Fibonacci-Folge:

1	2	3	4	5	6	Summe 1 – 6
a	b	a + b	a + 2b	2a + 3b	3a + 5b	8a + 12b

$$4 \cdot (2a + 3b) = 8a + 12b$$