Kurioses über Zahlen

K 1)

$3\mathbf{3}^2 = \mathbf{1}0\mathbf{8}9$
$3\mathbf{33}^2 = \mathbf{11}0\mathbf{88}9$
$3\mathbf{333}^2 = \mathbf{111}0\mathbf{888}9$
…
$3\mathbf{33333}^2 = \mathbf{11111}0\mathbf{88888}9$

K 2)

$7^2 = 49$
$67^2 = 4\mathbf{48}9$
$667^2 = 44\mathbf{48}89$
$6667^2 = 444\mathbf{48}889$
$66667^2 = 4444\mathbf{48}8889$

K 3)

$1^2 = 1$
$11^2 = 121$
$111^2 = 12321$
$1111^2 = 1234321$
$11111^2 = 123454321$
$111111^2 = 12345654321$

```
111111 x 111111
         111111
        111111
       111111
      111111
     111111
    111111
    12345654321
```

K 4)

$\mathbf{1} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \mathbf{4} + 1 = (\mathbf{1} \cdot \mathbf{4} + 1)^2$
$\mathbf{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \mathbf{5} + 1 = (\mathbf{2} \cdot \mathbf{5} + 1)^2$
$\mathbf{17} \cdot 18 \cdot 19 \cdot \mathbf{20} + 1 = (\mathbf{17} \cdot \mathbf{20} + 1)^2$
$\mathbf{23} \cdot 24 \cdot 25 \cdot \mathbf{26} + 1 = (\mathbf{23} \cdot \mathbf{26} + 1)^2$
$\mathbf{n} \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot \mathbf{(n + 3)} + 1 = [\mathbf{n} \cdot \mathbf{(n + 3)} + 1]^2$

Beweis: $n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3) + 1 = \ldots = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1$
$[n \cdot (n + 3) + 1]^2 = \ldots = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1$

K 5) Über Primzahlen

Die Zahlen 31, 331, 3’331, 33’331, 333’331, 3’333'331 und 33'333'331 sind Primzahlen.

Daraus darf man jedoch nicht schliessen, dass 333'333'331 ebenfalls eine Primzahl ist.

Es gilt nämlich: 333'333'331 = 17· 19'607'843
333'333'331 ist **keine Primzahl.**

K 6) Primfaktorenzerlegung

11’111’111’111’111'111 = 2'071'723 · 5'363'222'357
2'071'723 und 5'363'222'375 sind Primzahlen.

Die Multiplikation kann man nachprüfen:

```
2071723 x 5363222357
         16089667071
        10726444714
       37542556499
       5363222357
     37542556499
    00000000000
   10726444714
...11111111111111111
```

K 7) Grösste Primzahl Stand 14. November 2001

Die grösste Primzahl Stand 14. November 2001: $\boxed{p = 2^{13'466'917} - 1}$.

Diese Zahl hat 4'053’946 Stellen und würde, ausgeschrieben, etwa 800 A4-Seiten füllen. Gefunden wurde diese Primzahl vom 20-jährigen Michael Cameron, der dafür ein das Computer-Netzwerk von Freiwilligen aus aller Welt nutzte[1].

K 8) Goldbachsche Vermutung

Die *starke* Goldbachsche Vermutung:

Jede gerade Zahl grösser als 2 lässt sich als Summe zweier Primzahlen darstellen.

```
 4 = 1 + 3
 6 = 3 + 3
 8 = 3 + 5
10 = 3 + 7
...
```

Diese Vermutung äusserte Christian Goldbach (1690 – 1764) 1742 in einem Brief an Leonhard Euler.

Die „Goldbachsche Vermutung“ ist bis heute unbewiesen. Auf einen Beweis ist ein Preis von einer Million Dollar ausgesetzt.

Die „Goldbachsche Vermutung“ wurde 2005 von *Oliveira* und *Silva* für alle Zahlen bis $2 \cdot 10^{17}$ überprüft.

Die *schwache* Goldbachsche Vermutung:

Jede ungerade Zahl grösser als 5 lässt sich als Summe dreier Primzahlen darstellen.

```
 7 = 1 + 1 + 5
 9 = 5 + 3 + 1
11 = 5 + 3 + 3
...
```

Die schwache Goldbachsche Vermutung gilt als bewiesen.

[1] Siehe dazu die Webseite http://www.primzahlen.de.

K 9)

Jede Zahl lässt sich als Summe oder Differenz von höchstens vier Quadratzahlen darstellen.

$5 = 2^2 + 1^2$
$6 = 2^2 + 1^2 + 1^2$
$15 = 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$
$15 = 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$
$22 = 4^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$
$23 = 4^2 + 2^2 + 2^2 - 1^2$
...

K 10) Rationale Zahlen

Die rationalen Zahlen sind alle Bruchzahlen mit ganzzahligem Zähler und ganzzahligem Nenner.

Jede <u>endliche oder periodische</u> Dezimalzahl lässt sich als Bruchzahl schreiben.

Jede Bruchzahl lässt sich als endliche oder periodische Dezimalzahl schreiben.

Dividiert man eine Ganzzahl a durch eine Ganzzahl b, so erhält man entweder eine *endliche Dezimalzahl* oder eine *periodische Dezimalzahl* mit der *Periodenlänge b – 1*.

$1 : 7 = 0.\overline{142857}$	$4 : 7 = 0.\overline{571428}$	$7 : 7 = 0.\overline{428571}$
$2 : 7 = 0.\overline{285714}$	$5 : 7 = 0.\overline{428571}$	$8 : 7 = 0.\overline{428571}$
$3 : 7 = 0.\overline{428571}$	$6 : 7 = 0.\overline{428571}$	$9 : 7 = 0.\overline{428571}$

$1 : 17 = 0.\overline{0588235294\ 117647}$ (Periodenlänge 16)

$1 : 97 = 0.\overline{0103092783\ 5051546391\ 7525773195\ 8762886597\ 9381443298\ 9690721649\ 4845360824\ 7422680412\ 3711340206\ 185567}$
(Periodenlänge 96)

K 11) Irrationale (algebraische und transzendente) Zahlen

Irrationale Zahlen sind die nichtperiodischen Dezimalzahlen. Beispielsweise 0.11o1001000100001…

Unter den irrationalen Zahlen gibt es zwei Gruppen:

1. Algebraische Zahlen

   Algebraische Zahlen sind die Lösungen von algebraischen Gleichungen: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ wobei die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, … a_n ganze Zahlen sind.

   Beispiel: Die Gleichung $x^2 - 2 = 0$ hat als Lösung $x = \sqrt{2}$.
   Die Gleichung $x^3 - 7 = 0$ hat als Lösung $x = \sqrt[3]{7}$.

   $\sqrt{2}$ und $\sqrt[3]{7}$ (und alle übrigen Wurzeln die nicht gerade ganzzahlig sind) sind *algebraische Zahlen*. Durch geeignete mathematisch Operationen lassen sie sich in natürliche oder rationale Zahlen verwandeln.

   Beispiel: $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$, $\left(\sqrt[3]{7}\right)^3 = 7$.

2. Transzendente Zahlen

   Bei transzendenten Zahlen kann man machen was man will: Addieren, multiplizieren, potenzieren, kochen oder braten, man wird nie eine ganze oder rationale Zahl daraus gewinnen können. Das gilt beispielsweise für die oben schon angeführte irrationale Zahl 0.1101001000100001…. Dies Zahl ist transzendent.

Die berühmteste transzendente Zahl ist die „Ludolphsche Zahl“ π. Sie gibt das Verhältnis von Kreisumfang und Kreisdurchmesser an. *Ludolph von Ceulen* (1540 – 1610), Professor für Arithmetik, Vermessungskunde und Festungsbau an der Universität Leiden, hat diese Zahl auf 35 Stellen genau berechnet.
π = 1.41159265…
Ludolph von Ceulen betrachtete diese Berechnung als sein Lebenswerk. Diese 35 Stellen zieren auch seinen Grabstein.

Der derzeitige Rekord zur Berechnung π steht bei 1'241'100'000'000 Stellen[2]. Das sind etwa 248 Millionen Seiten im Format A4. Wie stellt man nun fest, ob die Berechnung stimmt? Indem man ein zweites Programm mit einem anderen Berechnungsverfahren einsetzt. Wie vergleicht man die beiden Berechnungen? Angenommen man vergleicht pro Sekunde vier Stellen, so würde man zu diesem Vergleich etwa 10'000 Jahre benötigen. Um diesen Vergleich vorzunehmen muss man also nochmals eine Computerprogramm einsetzen.

Ein eigenartiger (inoffizieller) Weltrekord: 1995 zählte der Japaner *Akira Haraguchi* 83'431 Stellen der Zahl π auf. Er benötigte dafür 16 Stunden. Das bedeutet durchschnittlich etwa 40 Stellen pro Minute.

Die Zahl π hat unendlich viele Stellen. «Irgendwann» muss jede Zahlenkombination einmal auftauchen – auch wenn man lange warten muss. Die Zahlenfolge 0123456789 beispielsweise tritt nach der 53'217'618'704-ten Stelle erstmals auf.

Um sich eine Vorstellung von Unendlichkeit zu machen. Denken Sie sich die gesamte Bibel in Zahlen umgesetzt: 1 für a, 2 für b, 3 für c usw. Das ergibt wohl eine ziemlich lange Ziffernkette. «Irgendwann» muss auch diese Ziffernkette in der unendlichen Kette der Stellen von π auftreten!

Eine weitere wichtige algebraische Zahl ist die Eulersche Zahl e. e = 2.7182818284...

Die Eulersche Zahl wurde auch schon auf eine Million Stellen genau berechnet.

[2] Einen praktischen Nutzen ist nicht zu erkennen. Siehe dazu auch die Webseite der «Freunde der Zahl Pi» http://pi314.at.