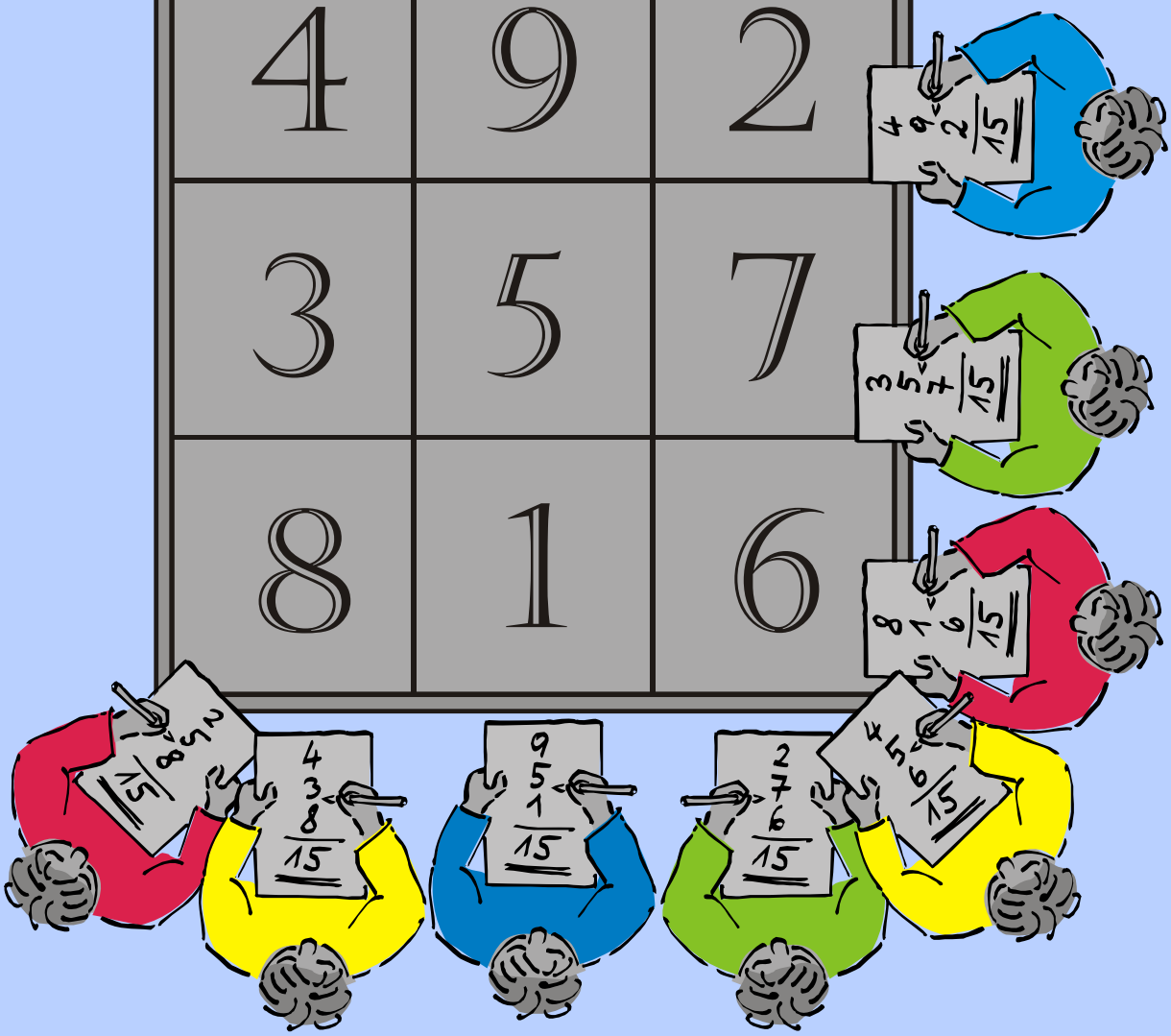
MAGISCHE QUADRATE

4	9	2
3	5	7
8	1	6



D. O. 06

Magische Quadrate

Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt aus Albrecht Dürers Kupferstich «Melancholie». Bei genauem Hinsehen erkennen Sie ein magisches Quadrat vierter Ordnung. In den 4 x 4 = 16 Feldern sind alle Zahlen von 1 bis 16 so angeordnet, dass man in jeder Zeile und in jeder Spalte und auch noch in den beiden Diagonalen die gleiche Zahlensumme erhält.

Was magische Quadrate mit Melancholie zu tun haben, darauf weiss ich allerdings keine Antwort. Vielleicht finden Sie eine.

von Dieter Ortner

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Die «Melancholie» entstand im Jahr 1514.

1. Ein magisches Quadrat der Ordnung 3

?	?	?
?	?	?
?	?	?

Ein magisches Quadrat der Ordnung 3 besteht aus 3 x 3 = 9 Feldern.

Man kann Schülerinnen und Schülern ohne weiteres zumuten, ein solches Quadrat zu suchen und zu finden. Wenn eine Klasse mit 20 Schülerinnen und Schülern auf die Suche geht, wird es nicht lange dauern und eine Lösung ist gefunden. Durch Zufall, mehr oder weniger.

Man kann aber auch systematisch vorgehen.

Zunächst wird die Zeilensumme ermittelt:

$$\frac{1}{3}\cdot(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = \mathbf{15}$$

Nun werden systematisch alle Möglichkeiten gesucht, aus den Zahlen von 1 bis 9 mit drei Summanden die Summe 15 zu erhalten:

1 + 5 + 9 = 15	2 + 6 + 7 = 15
1 + 6 + 8 = 15	3 + 4 + 8 = 15
2 + 4 + 9 = 15	3 + 5 + 7 = 15
2 + 5 + 8 = 15	4 + 5 + 6 = 15

Man erhält genau 8-mal die Summe 15. Ein Quadrat der Ordnung 3 hat drei Zeilen, drei Spalten und zwei Diagonalen, also genau 8-mal muss die Summe 15 entstehen. Das passt also.

Man erkennt auch noch folgendes:

- Die 5 steht in vier der acht Summen. Also muss die 5 in der Mitte stehen.
- Die geraden Zahlen 2, 4, 6 und 8 kommen jeweils in zwei Summen vor. Also müssen diese Zahlen in die Ecken.

Der Rest ergibt sich dann beinahe von selbst.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Im Grunde gibt es hier nur eine Lösung. Alle übrigen Lösungen entstehen aus dieser Lösung durch Drehung und Spiegelung.

2. Magische Quadrate der Ordnung 4

Für Quadrate mit 4 x 4 = 16 Feldern lässt sich das Verfahren, welches wir für Quadrate mit 3 x 3 = 9 Feldern verwendet haben, nicht mehr anwenden. Es gibt zu viele Möglichkeiten.

Zunächst ein Problem, das dem Anschein nach gar nichts mit magischen Quadraten zu tun hat:

A	A	A	A
B	B	B	B
C	C	C	C
D	D	D	D

Abbildung 1

Sie sehen hier 16 Kärtchen in vier verschiedenen Farben und vier verschiedenen Buchstaben A, B, C und D[1]. Die Aufgabe besteht darin, diese 16 Kärtchen so anzuordnen, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und auch jeder der beiden Diagonalen jede Farbe und jeder Buchstabe nur einmal vorkommt.

Wenn Sie Ihren Schülerinnen und Schülern diese Aufgabe stellen, werden sie ziemlich lange beschäftigt sein. Ein Erfolg ist nicht garantiert.

Es empfiehlt sich also hier, systematisch vorzugehen, und zwar in folgender Weise:

Lassen wir zunächst einmal die Farben weg und beschränken wir uns auf die Formen.

Eine mögliche Lösung:

A	B	C	D
D	C	B	A
B	A	D	C
C	D	A	B

Abbildung 2

Nun tauschen wir die Buchstaben gegen Farben:

A → blau
B → grün
C → rot
D → gelb

Das Ergebnis sieht so aus:

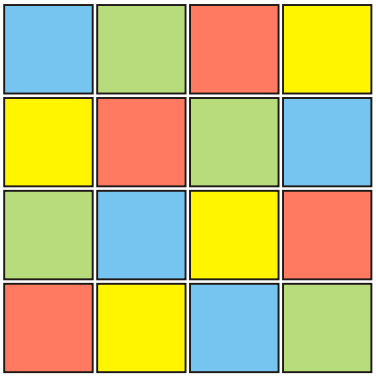


Abbildung 3

Legt man nun die Formen und die Farben übereinander, so ist das Ergebnis leider noch nicht befriedigend:

A	B	C	D
D	C	B	A
B	A	D	C
C	D	A	B

Abbildung 4

Man muss etwas anderes machen. Man muss die Farben um 90° drehen und dann die Formen darüber legen. Dann hat man die Lösung:

A	B	C	D
D	C	B	A
B	A	D	C
C	D	A	B

Abbildung 5

Beachte dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und auch in jeder der beiden Diagonalen jede Farbe und jedes Symbol nur einmal vorkommt.

[1] Man kann auch Jasskarten verwenden: As, König, Ober und Under in den Farben Schellen, Schilten, Eichel und Rose.

Für das Weitere ersetzen wir die Farben durch Kleinbuchstaben:

rot → a
grün → b
gelb → c
blau → d

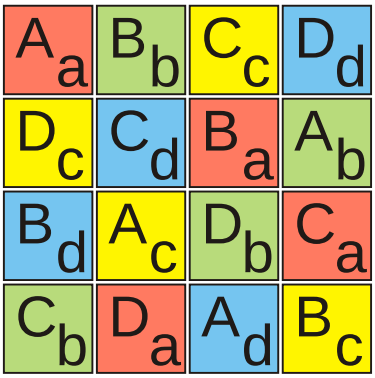


Abbildung 6

Was hat diese Spielerei mit magischen Quadraten zu tun?

In jeder Zeile, in jeder Spalte und auch in den beiden Diagonalen kommen alle Grossbuchstaben und alle Kleinbuchstaben genau einmal vor.

Wenn man den Grossbuchstaben und den Kleinbuchstaben Zahlen zuordnet, so erhält man für alle Zeilen, Spalten und Diagonalen dieselbe Summe, nämlich A + B + C + D + a + b + c + d.

In den einzelnen Feldern werden die Zahlenwerte für die Grossbuchstaben und für die Kleinbuchstaben addiert:

A+a	B+b	C+c	D+d
D+c	C+d	B+a	A+b
B+d	A+c	D+b	C+a
C+b	D+a	A+d	B+c

Bestimmen wir nun die Zeilensumme für magische Quadrate der Ordnung 4:

$\frac{1}{4} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 14 + 15 + 16) = \mathbf{34}$

Für jede Zeile, für jede Spalte und auch für die beiden Diagonalen muss die **Summe gleich 34** sein.

Bei der Zuordnung der Zahlenwerte muss darauf geachtet werden, dass **genau alle Zahlen von 1 bis 16 entstehen.** Also für A + a, B + b, C + c, D + d, D + c, C + d usw. bis B + c müssen die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 erhalten werden. Das ist nicht allzu schwierig.

Ich setze A = 1, B = 2, C = 3 und D = 4.

Wenn ich a = 0 setze, so erhalte ich:
A + a = 1, B + a = 2, C + a = 3 und D + a = 4.

Für b muss ich nun 4 setzen und erhalte:
A + b = 5, B + b = 6, C + b = 7 und D + b = 8.

Für c muss ich 8 setzen und erhalte:
A + c = 9, B + c = 10, C + c = 11 und D + c = 12.

Für d muss ich 12 setzen und erhalte:
A + d = 13, B + d = 14, C + d = 15 und D + d = 16.

Ergebnis:

Mit A = 1 B = 2 C = 3 D = 4
und a = 0 b = 4 c = 8 d = 12

erhält man:

1	6	11	16
12	15	2	5
14	9	8	3
7	4	13	10

Das ist ein magisches Quadrat der Ordnung 4.

Die Werte für A, B, C und D kann man beliebig vertauschen, ebenso die Werte für a, b, c und d. Man erhält immer wieder ein magisches Quadrat.

Beispiel:

Mit A = 3 B = 2 C = 1 D = 4
und a = 4 b = 0 c = 12 d = 8

erhält man:

7	2	13	12
16	9	6	3
10	15	4	5
1	8	11	14

Das ist wieder ein magisches Quadrat.

Es gibt noch eine Reihe weiterer Lösungen:

Mit A = 1 B = 2 C = 5 D = 6
und a = 0 b = 2 c = 8 d = 10

erhält man:

1	4	13	16
14	15	2	3
12	9	8	5
7	6	11	10

Mit A = 1 B = 2 C = 9 D = 10
und a = 0 b = 2 c = 4 d = 6

erhält man:

1	4	13	16
14	15	2	3
8	5	12	9
11	10	7	6

Mit A = 0 B = 4 C = 8 D = 12
und a = 1 b = 2 c = 3 d = 4

erhält man:

1	6	11	16
15	12	5	2
8	3	14	9
10	13	4	7

Mit A = 0 B = 2 C = 8 D = 10
und a = 1 b = 2 c = 5 d = 6

erhält man:

1	4	13	16
15	14	3	2
8	5	12	9
10	11	6	7

Mit A = 0 B = 2 C = 4 D = 6
und a = 1 b = 2 c = 9 d = 10

erhält man:

1	4	13	16
15	14	3	2
12	9	8	5
6	7	10	11

Das magische Quadrat aus Dürers «Melancholie» erhält man mit folgenden Werten für A, B, C, D, a, b, c und d:

A = 6 B = 1 C = 2 D = 5
a = 10 b = 2 c = 0 d = 8

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Mit diesem Verfahren erhält man 432 verschiedene (auch nicht durch Drehung oder Spiegelung auseinander ableitbare) magische Quadrate der Ordnung 4.

Leider funktioniert dieses Verfahren für magische Quadrate höherer Ordnung nicht mehr. Ich habe es versucht, es funktioniert nicht.

3. Magische Quadrate der Ordnung 3, 5, 7, ...

Für magische Quadrate mit ungerader Ordnung (Ordnung 3, 5, 7, 9 usw.) gibt es zwei interessante Verfahren.

Aus dem Indischen ist folgende Vorschrift überliefert:

- Man schreibt 1 in die Mitte der obersten Zeile, dann 2 im untersten Feld in der rechts daneben befindlichen Spalte und schreibt dann die weiteren Zahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge diagonal nach rechts oben.
- Nach dem Erreichen des rechten Randes fährt man ganz links in der darüber befindlichen Zeile fort.
- Nach dem Erreichen des oberen Randes fährt man wieder im untersten Feld der rechts daneben befindlichen Spalte fort.
- Wenn man auf ein schon besetztes Feld stösst, fährt man in dem Feld fort, welches unter dem zuletzt ausgefüllten Feld liegt.
- Erreicht man das Feld in der rechten oberen Ecke, so setzt man in dem darunter liegenden Feld fort.

Testen wir diese Vorschrift an einem Quadrat der Ordnung 5. Die ersten Schritte sehen folgendermassen aus:

		1	8	
	5	7		
4	6			
				3
			2	

Und weiter bis zur vollständig ausgefüllten Tabelle:

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Erstaunlich, es handelt sich wirklich um ein magisches Quadrat. Die Zeilen-, Spalten- und Digaonalensumme beträgt 65.

Versuchen Sie sich selber an einem Quadrat der Ordnung 7. Sie werden sehen, das System funktioniert.

			1			
5						
						4
					3	
				2		

Die Lösung:

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

Dies ist ein magisches Quadrat der Ordnung 7. Die Zeilen-, Spalten- und Digaonalensumme beträgt 175.

Wenn das Verfahren für alle Quadrate mit ungerader Ordnungszahl allgemein gilt, dann muss es auch für ein Quadrat der Ordnung 3 gelten. Versuchen Sie es.

	1	
		2

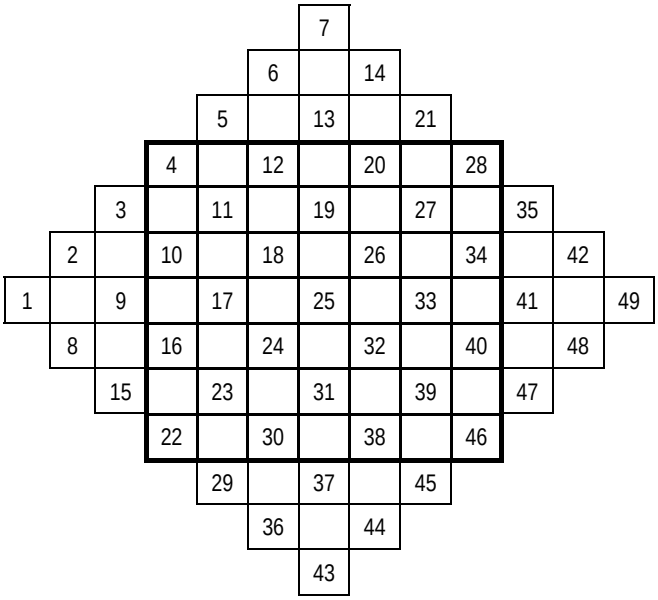
Die Lösung:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

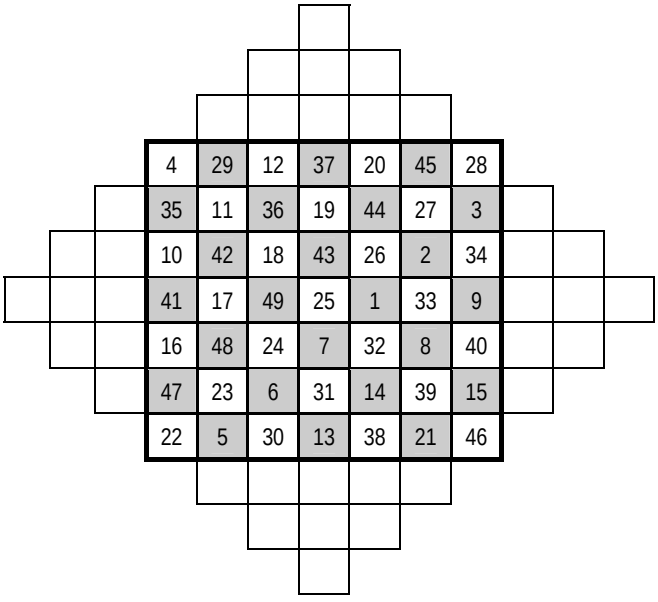
Es funktioniert!

Ein weiteres interessantes Verfahren zur Bildung magischer Quadrate ungerader Ordnung. Ich erläutere das Verfahren für ein Quadrat der Ordnung 7.

Zunächst schreibt man die Zahlen von 1 bis 49 in ihrer natürlichen Reihenfolge in folgender Weise diagonal:

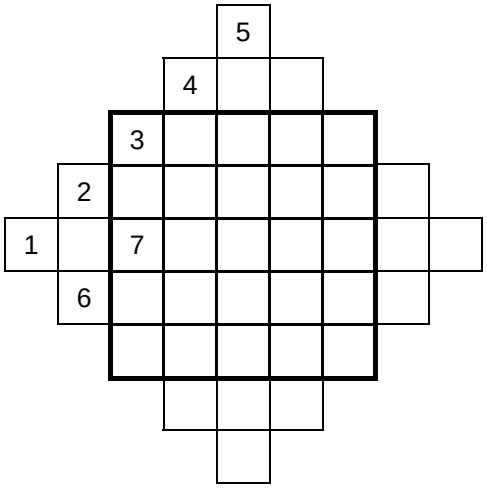


Nun setzt man die Zahlen ausserhalb des zu füllenden Quadrates, ohne dabei ihre Stellung zu ändern, in die an der Gegenseite leer gebliebenen Felder. Damit erhält man folgendes magisches Quadrat:

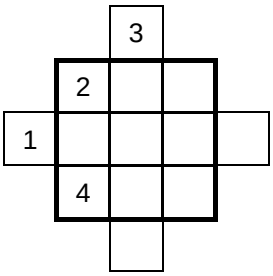


Dies ist ein magisches Quadrat der Ordnung 7. Die Zeilen-, Spalten- und Digaonalensumme beträgt 175.

Testen Sie dieses Verfahren für ein Quadrat der Ordnung 5.



Auch für ein Quadrat der Ordnung 3 muss das Verfahren funktionieren.



4. Ein Rezept für ein Quadrat der Ordnung 4

Zunächst schreibt man die Zahlen von 1 bis 16 in ihrer natürlichen Reihenfolge in die Felder des Vierquadrates.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Die Zahlen in den Feldern der beiden Diagonalen bleiben stehen, die übrigen Zahlen werden ersetzt durch ihre Ergänzung auf 17:

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Man erhält ein magisches Quadrat der Ordnung 4.

5. Ein merkwürdiges Quadrat der Ordnung 5

Zunächst eine Aufgabe, die Schülerinnen und Schüler ohne Probleme lösen können. Die leeren Felder sollen zu einem magischen Quadrat der Ordnung 5 ergänzt werden.

1				
20			16	6
19	15	13	11	
2	10	17		24
23	8	5	4	

Die Lösung lautet:

1	18	21	22	3
20	14	9	16	6
19	15	13	11	7
2	10	17	12	24
23	8	5	4	25

Die Summe in den Zeilen und Spalten und den beiden Diagonalen beträgt 65, wie es sein muss.

Das Merkwürdige daran ist, dass man für das innere Quadrat mit den 9 Feldern ebenfalls gleiche Zeilen- und Spaltensummen erhält, nämlich 39.

Aus dem inneren Quadrat kann man ein magisches Quadrat der Ordnung 3 erhalten, wenn man in jedem Feld die Zahl 8 subtrahiert:

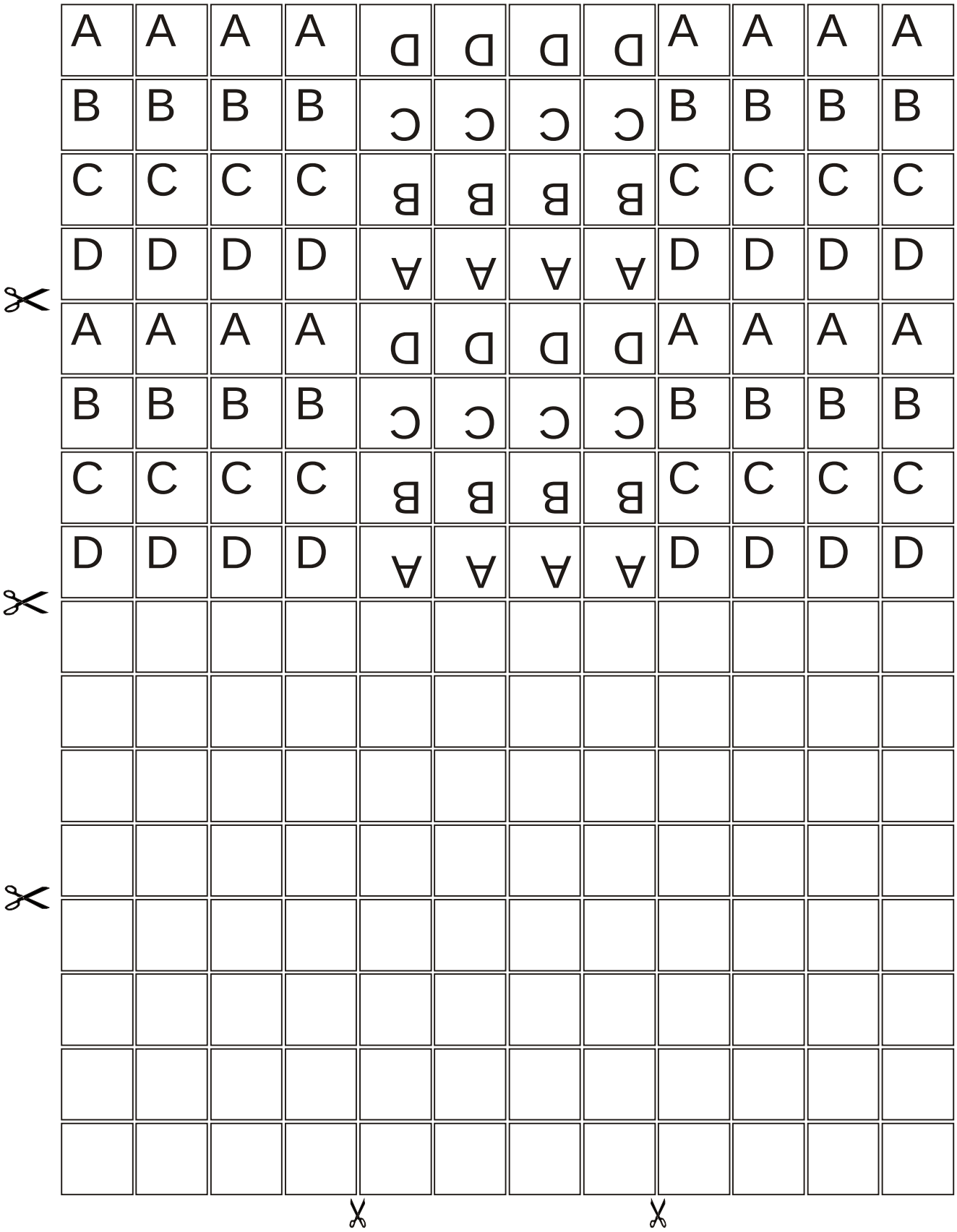
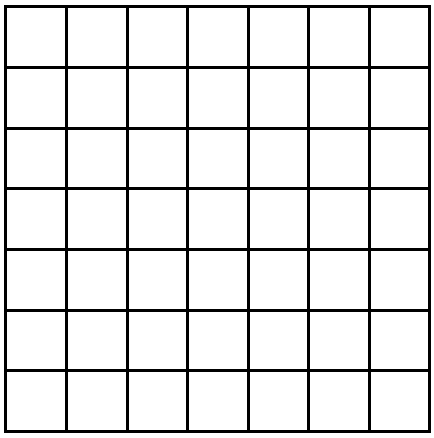
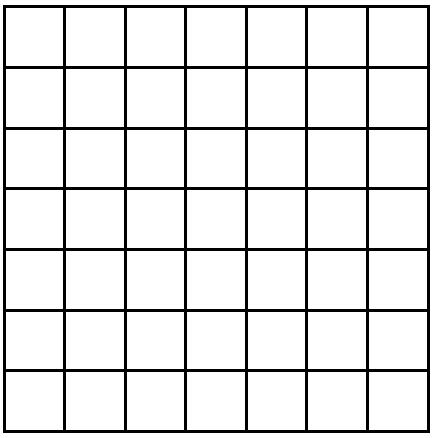
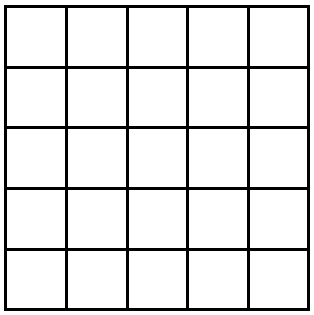
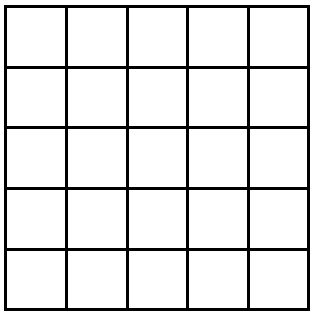
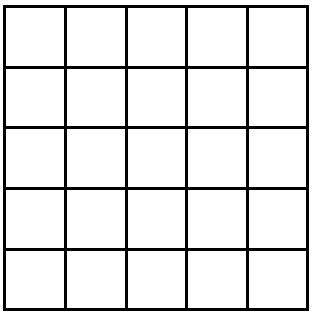
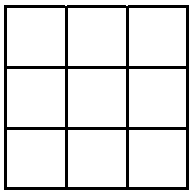
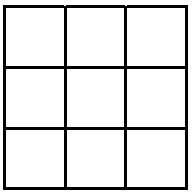
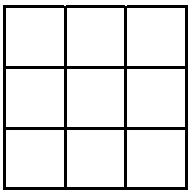
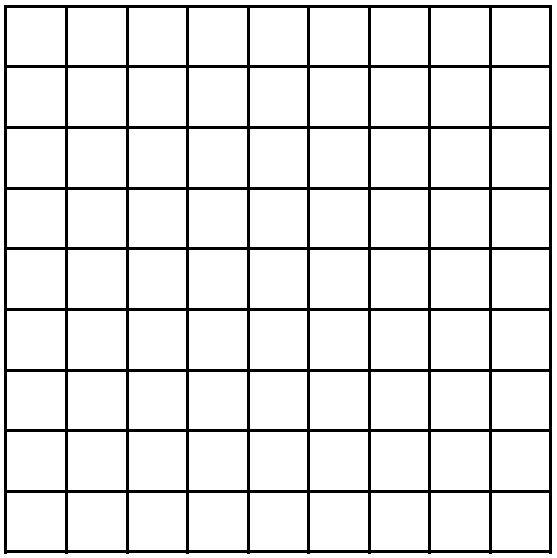
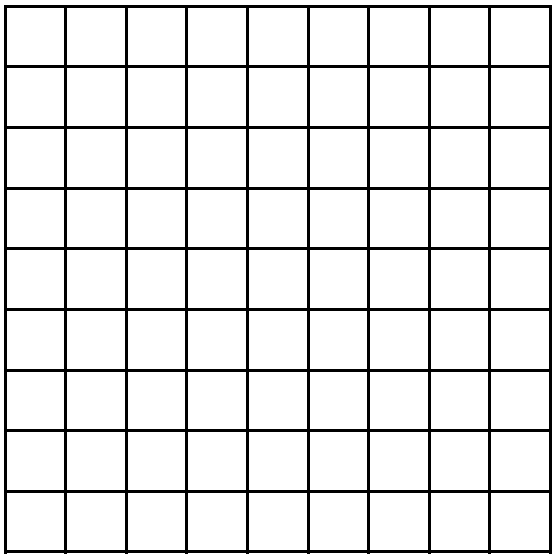
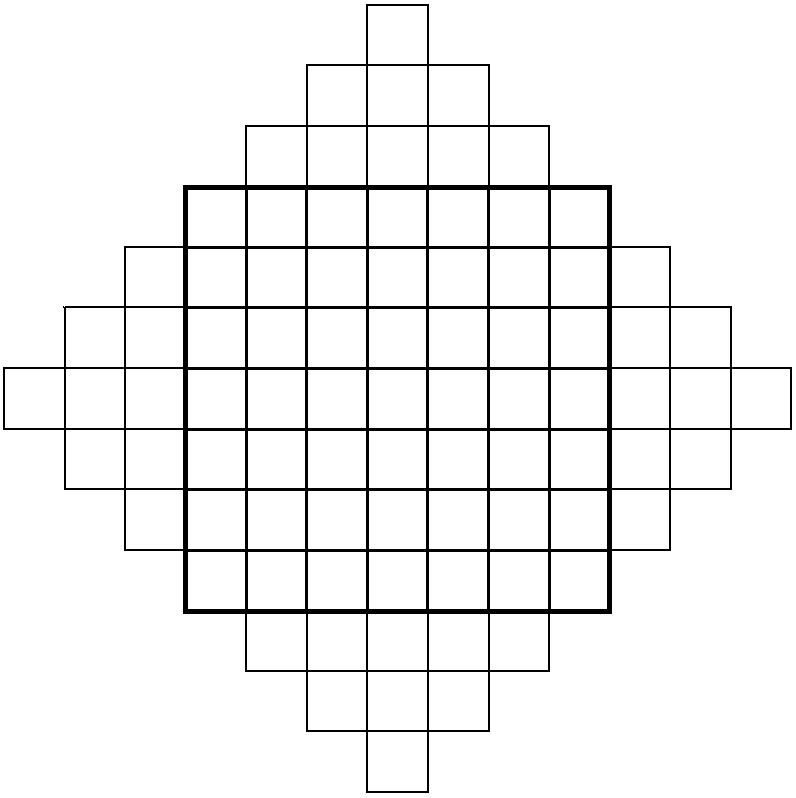
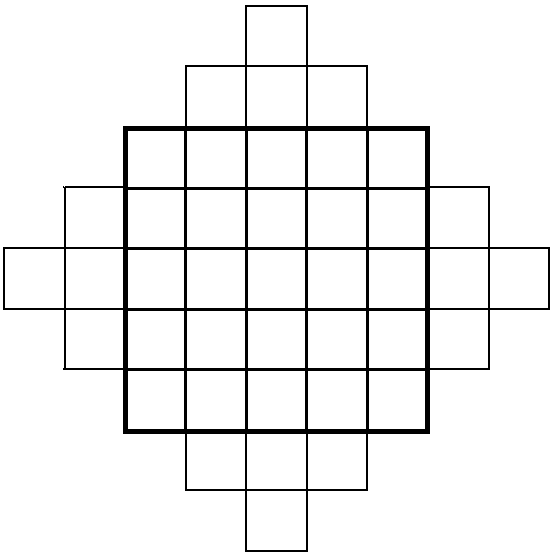
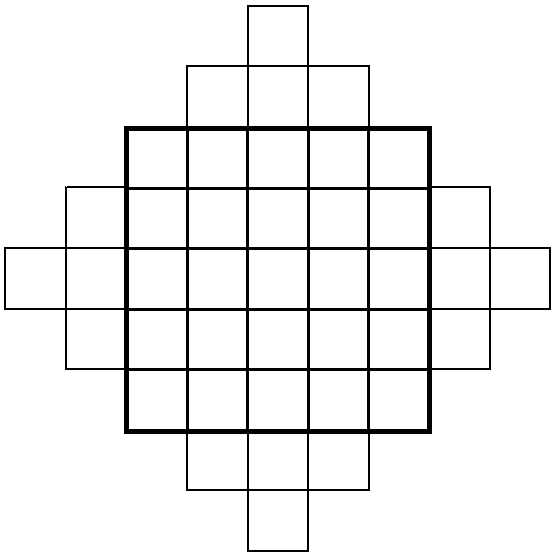
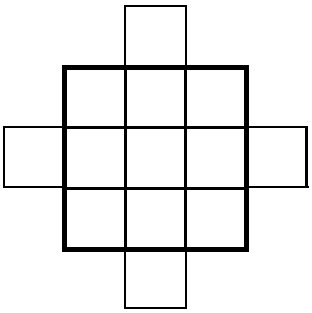
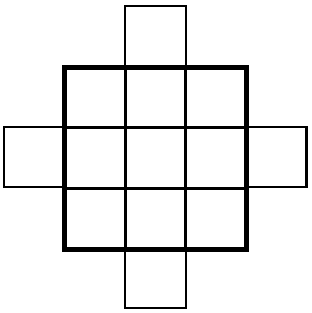
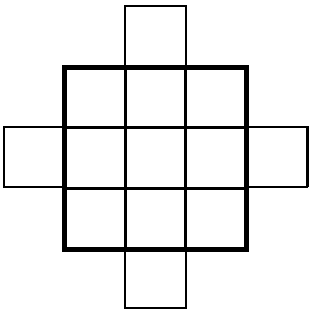
14	9	16		6	1	8
15	13	11	$\xrightarrow{-8}$	7	5	3
10	17	12		2	9	4

Die Entdeckung dieses merkwürdigen Quadrats wird Michael Stifel (1487 – 1567) zugeschrieben.

Literatur:

H. Schubert und J. Erlenbach,
Mathematische Mussestunden,
Walter de Gryter, Berlin 1967

(Dieses Buch enthält weitere Verfahren zur Bestimmung magischer Dreiecke und vieles anderes mehr.)



1. Kopieren Sie diese Vorlage je einmal auf rotem, gelbem, grünem und blauem Papier. Das reicht für 24 Schüler.
2. Jeder Schüler erhält zunächst die 16 Buchstaben A, B, C und D in einer Farbe. Die Buchstaben sollen so angeordnet werden, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte jeder Buchstabe nur einmal vorkommt (Abbildung 2).
3. Danach erhält jeder vier rote, vier gelbe, vier grüne und vier blaue Felder, welche gemäss Abbildung 3 angeordnet werden. Man sollte die 16 farbigen Felder auf ein Blatt Papier kleben.
4. Das Blatt mit den farbigen Feldern wird um 90° im Uhrzeigersinn gedreht und gemäss Abbildung 5 werden die Buchstaben A, B, C und D eingetragen. Die Lösung ist gefunden.