Mathematische Beweise

Die Mathematik ist in der Lage, ihre Lehrsätze „ein für allemal“ zu beweisen. Ist ein Satz einmal bewiesen, so wird er wohl für immer gültig sein. Es ist ja nicht denkbar, dass eines Tages jemand kommt und den Pythagoreischen Lehrsatz widerlegt. Ist eine Behauptung widerlegt, so kann nicht eines Tages jemand kommen und die Behauptung doch als gültig beweisen.

Die Beweisführung oder auch die Widerlegung einer Behauptung muss allerdings nach strengen und allgemein anerkannten Regeln erfolgen.

Die Mathematik ist die einzige Wissenschaft, die allgemein und unumstösslich gültige Lehrsätze aufstellen kann. In den Naturwissenschaften oder auch in den Sozial- und Wirtschaftswissenschaften ist dies ja nicht der Fall. Die Physik kann nur Hypothesen aufstellen und sie durch Experimente stützen, kann aber nie sicher sein, ob nicht doch eine Situation eintritt, welche der Hypothese widerspricht. Physikalische Aussagen können widerlegt werden, sie können aber nie als endgültig bezeichnet werden.

Der Satz „es gibt kein Leben auf dem Mars“ hätte *falsifiziert* werden können, wenn die Marssonde Leben auf dem Mars gefunden hat. Die Marssonde hat kein Leben auf dem Mars gefunden, damit ist der Satz jedoch noch nicht *verifiziert*.

Beispiel 1

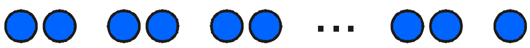
Beweise, dass die Summe zweier ungerader Zahlen eine gerade Zahl ist.

Man kann viele Beispiele bringen: 5 + 7 = 12, 13 + 27 = 40, 333 + 111 = 444 usw.

Damit ist der Satz jedoch noch nicht bewiesen. Es könnten ja einmal zwei ungerade Zahlen auftauchen, deren Summe wieder eine ungerade Zahl ist.

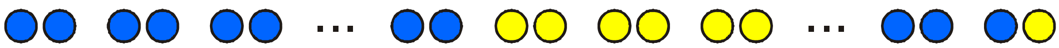
1. Beweis (ikonisch):

Wir stellen die Zahlen durch Münzen oder Erbsen dar. Ungerade Zahlen zeichnen sich dadurch aus, dass bei der Paarbildung immer eine Münze übrig bleibt.

Erste Zahl: 

Zweite Zahl: 

Addiert man die beiden Zahlen, so können die beiden Einzelgänger ein Paar bilden und das Ergebnis ist eine gerade Zahl.

Summe: 

2. Beweis (mathematisch symbolisch):

Erste Zahl: $a = 2n + 1$ (mit n eine beliebige natürliche Zahl)

Zweite Zahl: $b = 2m + 1$ (mit m eine beliebige natürliche Zahl)

Summe: $a + b = 2n + 1 + 2m + 1 = 2(n + m) + 2 = 2(n + m + 1)$ $\rightarrow$ a + b ist eine gerade Zahl

Beispiel 2

Beweisen Sie, dass das Produkt dreier aufeinander folgender Zahlen immer durch sechs teilbar ist.

Deduktion Aus einem allgemeinen Lehrsatz wird ein Sonderfall abgeleitet.
Beispiel: Aus „die Winkelsumme in einem Dreieck beträgt 180°“ folgt „die Winkelsumme eines gleichseitigen Dreiecks beträgt 180°“.
Deduktion ist mathematisch zulässig.

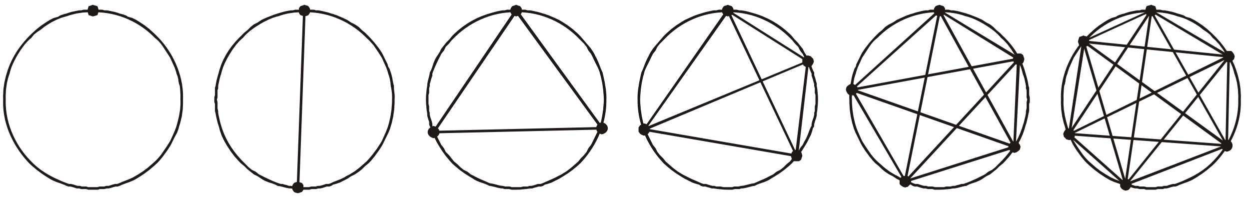
Induktion Aus Spezialfällen wird ein allgemeiner Satz abgeleitet.
Die Induktion ist mathematisch nicht zulässig.

Beispiel 3

Dieses Beispiel soll zeigen, dass die Induktion mathematisch nicht zulässig ist.

In einem Kreis werden n =1, 2, 3, 4 … Punkte markiert und miteinander verbunden. Gesucht ist eine Formel, welche die Anzahl der dadurch entstehenden Flächenstücke zu berechnen erlaubt.

n sei die Anzahl der Punkte, A die Anzahl der Flächenstücke.



n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5	n = 6
A(1) = 1	A(2) = 2	A(3) = 4	A(4) = 8	A(5) = 16	A(6) = ?

In der Fortsetzung der Reihe könnte man vermuten, A(6) = 32 und allgemein $A(n) = 2^{n-1}$.

Die letzte Abbildung widerlegt diese Formel, A(6) = 31.

Es gibt allerdings eine Formel für A(n): $A(n) = \frac{1}{24}(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24)$.

Setzt man n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, … so erhält man:

A(1) = 1	A(2) = 2	A(3) = 4	A(4) = 8	A(5) = 16
A(6) = 31	A(7) = 57	A(8) = 99	A(9) = 163	A(10) = 256

Diese Formel stimmt also zumindest bis n = 6. Für n = 7, n = 8, n = 9 und n = 10 kann (mit viel Aufwand) wohl auch gezeigt werden dass sie stimm. Damit ist die allgemeine Gültigkeit jedoch noch lange **nicht bewiesen.**

Ich habe keine Ahnung, wie diese Formel zu beweisen ist. Vermutlich mit **vollständiger Induktion.** Dürfte aber sehr kompliziert sein.

Auf den **Beweis durch vollständige Induktion** komme ich später noch zu sprechen.

Beispiel 4

Noch ein Beispiel dafür, dass in der Mathematik induktives Vorgehen unzulässig ist.

Die Zahlen 31, 331, 3’331, 33’331, 333’331, 3’333'331 und 33'333'331 sind alles Primzahlen.

Daraus darf man jedoch nicht schliessen, dass 333'333'331 ebenfalls eine Primzahl ist.

Es gilt nämlich 333'333'331 = 17 · 19'607'843, es ist **keine Primzahl.**

Hinweis: Dass 31 eine Primzahl ist, ist leicht festzustellen. 31 ist weder durch 2, 3, 4 oder 5 teilbar. Weiter muss man nicht suchen. Warum eigentlich?

Ob eine Zahl n Primzahl ist oder nicht, muss untersucht werden, ob sie durch eine Primzahl kleiner als $\sqrt{n}$ teilbar ist.

Für 331 müssen alle Primzahlen bis $\sqrt{331} \approx 18$ untersucht werden, also 2, 3, 5, 7, 11, 13 und 17.

Für 3’331 müssen alle Primzahlen bis $\sqrt{3'331} \approx 58$ untersucht werden. Das könnte man vielleicht noch bewältigen.

Für 33’333’331 müssen alle Primzahlen bis $\sqrt{33'333'331} \approx 5'773$ untersucht werden. Da braucht man schon ein elektronisches Hilfsmittel, ein gewöhnlicher Taschenrechner genügt nicht. Sehen Sie dazu die Excel-Datei **Primzahlen.xls.**

Beispiel 5

Beweisen Sie:

Für jede Primzahl p gilt: Der Vorgänger (p – 1) oder der Nachfolger (p + 1) ist durch 6 teilbar.

Sieb des Erathostenes

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Primzahlen bis 100: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

Beispiel 6

Beweisen Sie: Multipliziert man, beginnend mit 2, eine beliebige Anzahl von aufeinander folgenden Primzahlen und addiert man 1, so erhält man eine Zahl, welche entweder Primzahl ist oder durch keine der verwendeten Primzahlen teilbar ist.

$2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 30 + 1 = 31$ ist eine Primzahl (und weder durch 2, 3 oder 5 teilbar)

$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30'030 + 1 = 30'031$ ist durch 59 teilbar, nicht aber durch die Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11 und 13.

Beweise dass es etwas nicht gibt oder dass etwas nicht möglich ist sind vielfach ebenso schwierig zu führen wie etwa zu beweisen, dass es kein Leben auf dem Mars gibt oder gar kein ausserirdisches Leben gibt. Man kann solche Behauptungen widerlegen, indem man ein Gegenbeispiel findet.

Ein berühmtes Beispiel ist Fermat's letzte Vermutung[1]. Obwohl es unendlich viele ganzzahlige Lösungen für die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ (das erste Pythagoreische Tripel ist 3, 4, 5), gibt es keine ganzzahlige Lösungen für $a^3 + b^3 = c^3$ oder gar noch höhere Potenzen von a, b und c.

In Fermat's Nachlass fand man zwar eine Randnotiz, er hätte einen einfachen Beweis gefunden, dass die Gleichung $a^n + b^n = c^n$ für n = 3, 4, 5, … keine ganzzahligen Lösungen besitzt, Fermat's Beweis konnte jedoch nicht gefunden werden. Man kann also auch nicht sicher sein, ob Fermat wirklich einen einfachen und gültigen Beweis für seine Vermutung gefunden hat. Die Gilde der Mathematiker hat sich 350 Jahre lang damit herumgequält, die *Fermat's letzte Vermutung* zu beweisen. Der Beweis gelang 1995 durch Andrew Wiles aus Cambridge, der damit – zumindest in der Welt der Mathematik – Unsterblichkeit erlangt hat.

[1] *Vermutung* und nicht *Lehrsatz* deshalb, weil Fermat ja den Beweis schuldig geblieben ist.
Pierre de Fermat 1607 – 1665

Beweis durch Überprüfung bzw. Aufzählung aller Möglichkeiten.

Solche Beweise können offenbar nur dann geführt werden, wenn die Anzahl der Möglichkeiten endlich ist und man auch sämtliche Möglichkeiten erfassen kann.

Aus praktischen Gründen sollte sich die Anzahl der Möglichkeiten in einem vernünftigen Rahmen halten.

Ein bekanntes Beispiel ist das **Vierfarbenproblem.** Das taucht schon in der ersten Primarschulklasse auch, in dem eine „Landkarte“ mit nicht mehr als vier Farben so eingefärbt werden soll, dass nie zwei gleiche Farben an einer Landesgrenze zusammenstossen. Egal wie die Landkarte aussieht, es braucht **nie mehr als vier Farben.** Über 100 Jahre lang konnte niemand eine Landkarte finden, bei der es mehr als vier Farben gebraucht hätte.

So einfach es erscheint, so hartnäckig widerstand das es jedem Versuch eines Beweises. Der Beweis gelang erst im Jahr 1976 durch **Haken** und **Appel**, bekannt geworden als „Silicon-Beweis“, weil er nämlich nur unter Zuhilfenahme eines dieser im Silikon-Vally erfundenen Computers möglich geworden ist. Haken und Appel reduzierten das Problem auf 1482 Grundprobleme und engagierten einen Computer, um innerhalb eines jeden Grundproblems alle Möglichkeiten durchzuchecken. Nicht weniger als 50 Tage lang war der Computer damit beschäftigt und konnte keine einzige Landkarte finden, die zu färben er mehr als 4 Farben gebraucht hätte.

Die Gilde der Mathematiker konnte nur das Programm überprüfen und nicht gern, zähneknirschend gewissermassen, anerkannte man diesen „Silicon-Beweis“ als mathematisch gültig.

Im Folgenden einige Beispiele wo es darauf ankommt, alle Möglichkeiten zu finden.

Beispiel 7

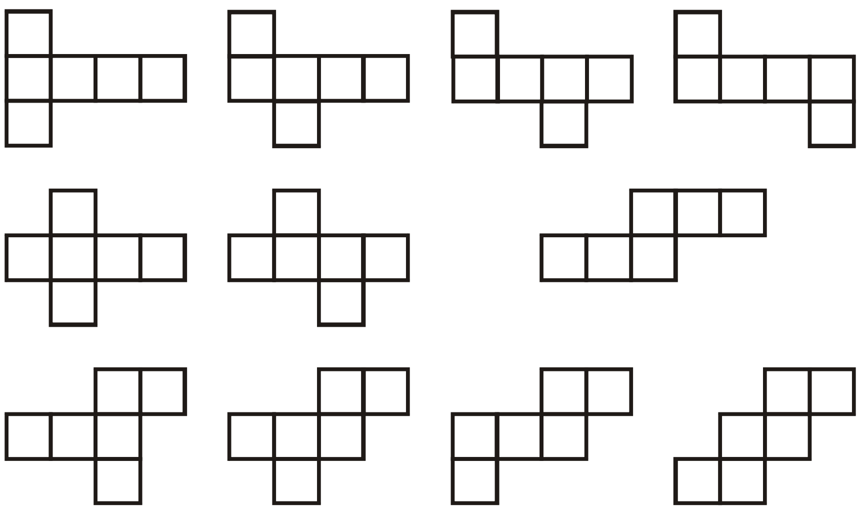
Beweise durch aufzählen aller Möglichkeiten:

1. Die Anzahl der Vertauchungsmöglichkeiten für drei verschiedene Dinge (a, b und c) beträgt $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.
2. Die Anzahl der Vertauchungsmöglichkeiten für vier verschiedene Dinge (a, b, c und d) beträgt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

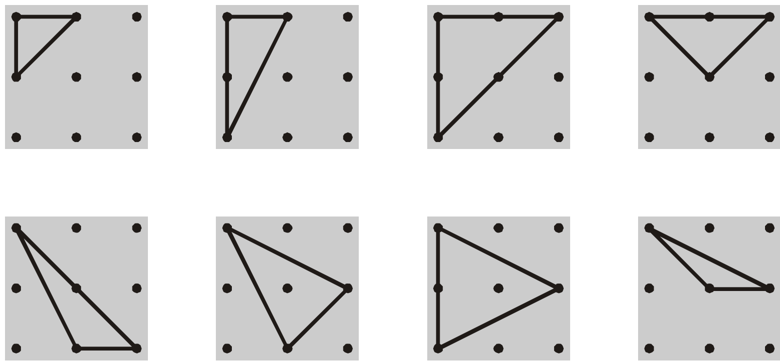
Bemerkung: Natürlich läuft dies hinaus auf die allgemeine Formel: Die Anzahl der Vertauschungsmöglichkeiten für n verschiedne Elemente beträgt $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$. Den allgemeinen Beweis kann man streng genommen nur durch **vollständige Induktion** führen. Davon später.

Beispiel 8

Zeige, es gibt genau 11 verschiedene Würfelnetze. (Zwei spiegelbildliche Netze werden dabei als gleich betrachtet.)

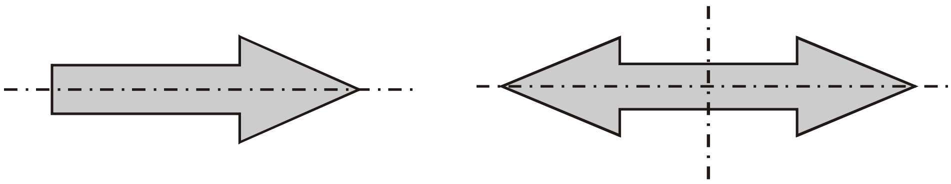


Beispiel 9
Zeige dass man auf einem Nagelbrett mit 3 x 3 = 9 Nägeln genau 8 verschiedene Dreiecke bilden kann.



Zwischenspiel Symmetrie

Achsiale Symmetrie
Eine Figur ist **achsialsymmetrisch**, wenn man eine **Symmetrieachse** finden kann.

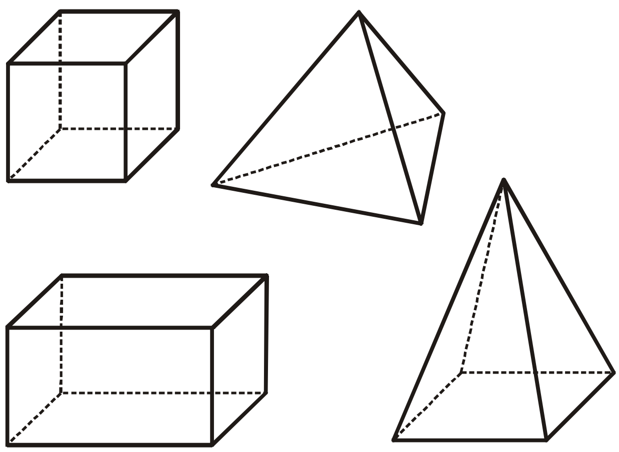


eine Symmetrieachse   zwei Symmetrieachsen

Wie viele Symmetrieachsen hat …
- … ein Rechteck
- … ein Quadrat
- … ein gleichseitiges Dreieck
- … ein gleichschenkeliges Dreieck
- … ein allgemeines Dreieck?

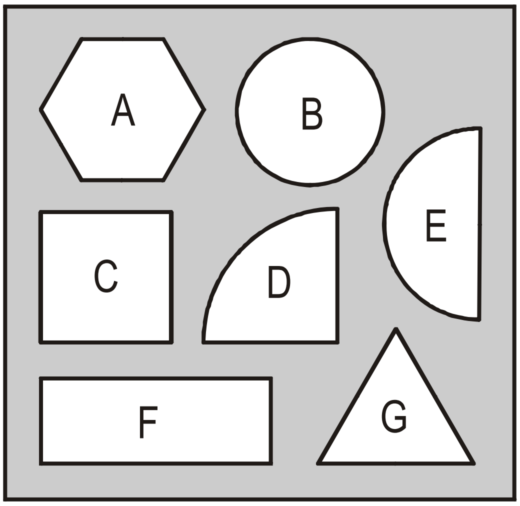
Symmetrieebenen
Für **Körper** lassen sich **Symmetrieebenen** finden. Eine gute Übung im räumlichen Vorstellungsvermögen.

Wie viele Symmetrieebenen hat …
- … ein Würfel
- … ein Quader
- … eine gerade quadratische Pyramide
- … ein Tetraeder?



Rotationssymmetrie

Sie kennen das Kinderspielzeug (zur Entwicklung der Feinmotorik und der Rotationssymmetrie), bei dem die Kinder verschiedene Klötzchen durch entsprechend geformte Öffnungen schieben sollen.



Frage: Bei welchem Klötzchen wird das Kind die geringste, bei welchem die grösste Schwierigkeit haben?

Wie viele Möglichkeiten hat das Kind jeweils für die Öffnungen A, B, C, D, E, F, G?

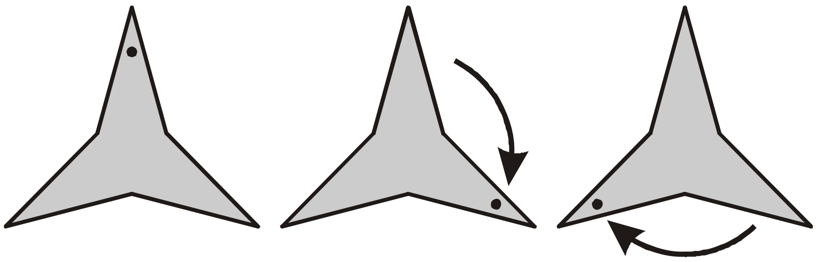
Rotationssymmetrie liegt dann vor, wenn durch Drehung einer Figur um ihren Mittelpunkt die Figur **in sich selber** übergeht.

Die **Ordnung der Rotationssymmetrie** gibt die Anzahl der Drehmöglichkeiten an.

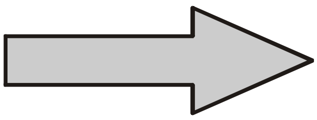
Diese Figur ist rotationssymmetrisch der Ordnung 3.

Durch Drehung um jeweils 120° geht die Figur in sich selber über.

Ist die Figur auch achsialsymmetrisch?



Diese Figur ist punktsymmetrisch der Ordnung 1:



Bestimmen Sie für die Öffnungen A, B, C, D, E, F, G jeweils die Ordnung.

Richtig oder falsch?

(a) Jede Figur hat eine Rotationssymmetrie zumindest von der Ordnung 1.

(b) Ein Dreieck hat eine Rotationssymmetrie der Ordnung 3.

(c) Ein Rechteck hat eine Rotationssymmetrie der Ordnung 4.

(d) Ein Quadrat hat eine Rotationssymmetrie der Ordnung 4.

(e) Eine rotationssymmetrische Figur mit der Ordnung 2 besitzt zwei Symmetrieachsen.

(f) Eine rotationssymmetrische Figur mit der Ordnung grösser 1 ist immer punktsymmetrisch.

(g) Eine rotationssymmetrische Figur deren Ordnung eine gerade Zahl ist, ist immer punktsymmetrisch.

Sie sehen: Eine Aussage, die falsch ist, kann man leicht durch ein Gegenbeispiel widerlegen. Eine Aussage die wahr ist, ist schwieriger zu beweisen. In der Regel benutzt man den **indirekten Beweis.**

Der indirekte Beweis oder „Recutio ad absurdum“

Der indirekte Beweis ist eine „Erfindung“ der alten Griechen. Er beruht auf dem „tertium non datur“. Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch, eine dritte Möglichkeit gibt es nicht.

In der Aussagenlogik bezeichnet man Aussagen mit Grossbuchstaben. Ist A eine beliebige Aussage (z. B. „5 ist eine Primzahl“) dann bezeichnet man mit $\neg$A die Verneinung der Aussage A („5 ist keine Primzahl). Dann ist entweder A wahr oder $\neg$A ist wahr. Hat man bewiesen, dass $\neg$A falsch ist, so muss A wahr sein.

Die berühmtesten Beweise der alten Griechen sind:

1. Es gibt unendlich viele Primzahlen.
2. Die Wurzel aus 2 ist keine rationale Zahl.

Behauptung: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis indirekt: Angenommen es gibt nur endlich viele Primzahlen. Und zwar die Primzahlen p_1, p_2, p_3, … p_n.

Damit wird folgende Zahl gebildet: $z = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$.

z ist eine natürliche Zahl.

z ist nicht teilbar durch p_1. z geteilt durch p_1 ergibt $p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n$ mit einem Rest von 1.

z ist nicht teilbar durch p_2. z geteilt durch p_2 ergibt $p_1 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n$ mit einem Rest von 1.

…

z ist nicht teilbar durch p_n. z geteilt durch p_n ergibt $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1}$ mit einem Rest von 1.

Also: z ist nicht teilbar durch p_1, nicht teilbar durch p_2, … und auch nicht teilbar durch p_n. Also ist z entweder eine Primzahl oder höchstens teilbar durch eine Primzahl grösser als p_n.

Die Annahme, dass es endlich viele Primzahlen gibt, hat zu einem Widerspruch geführt. **Die Anzahl der Primzahlen ist also unendlich.**

Bemerkenswert: Die alten Griechen haben das herausgefunden ganz ohne Einsatz von Computern.

Bemerkung 1: Man kann die Behauptung auch so formulieren: **Zu jeder Primzahl gibt es eine grössere.**

Wenn jemand meint, eine bestimmt Primzahl p_n sei die grösste, dann irrt sich der, wie man leicht beweisen kann, siehe oben.

Bemerkung 2: Die grösste Primzahl Stand 14. November 2001: $\boxed{p = 2^{13'466'917} - 1}$.

Diese Zahl hat 4'053'946 Stellen und würde, ausgeschrieben, etwa 800 A4-Seiten füllen. Gefunden wurde diese Primzahl vom 20-jährigen Michael Cameron, der dafür ein das Computer-Netzwerk von Freiwilligen aus aller Welt nutzte[2].

Behauptung: Die Wurzel aus 2 ist keine rationale Zahl.

Beweis indirekt: Angenommen die Wurzel aus wäre eine rationale Zahl. Dann könnte man sie als Bruchzahl schreiben:

$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ wobei a und b natürliche Zahlen sind. Man kann auch annehmen, dass der Bruch vollständig gekürzt ist.

Quadriert man die Gleichung, so erhält man $2 = \frac{a \cdot a}{b \cdot b}$.

Das kann aber nicht sein, a und b haben keine gemeinsamen Teiler. Die Annahme „ die Wurzel aus 2 eine rationale Zahl“ ist also falsch.

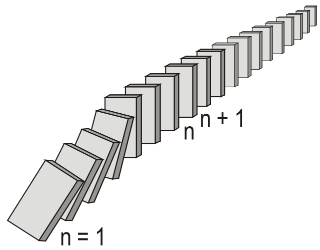
Ergebnis: **Die Wurzel aus 2 ist keine rationale Zahl, sie ist irrational.**

Bemerkenswert: Die alten Griechen haben das schon vor mehr als 2000 Jahren herausgefunden. Das muss sie zutiefst beunruhigt haben.

---

[2] Siehe dazu die Webseite http://www.primzahlen.de.

Beweis durch vollständige Induktion



Um das Prinzip zu verstehen denke man sich eine Reihe von unendlich vielen Dominosteinen im richtigen Abstand aufgestellt.

Wenn gesichert (bewiesen) ist, dass

1. der erste Dominostein umgeworfen wird (die Behauptung stimmt für n = 1),
2. jeder umfallende Dominostein den nächsten Dominostein umwirft (Schluss von n auf n + 1: wenn die Behauptung für n gilt, dann gilt sie auch für n + 1),

dann ist auch bewiesen, dass alle unendlich vielen Dominosteine umfallen werden.

Beispiel 10

Behauptung: $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{1}{2} n(n + 1)$

Schritt 1: Zu zeigen ist …

… die Behauptung stimmt für n = 1:	$1 = \frac{1}{2} 1(1 + 1) = 1$	das stimmt
die Behauptung stimmt auch für n = 2:	$1 + 2 = \frac{1}{2} 2(2 + 1) = 3$	das stimmt auch
die Behauptung stimmt auch für n = 3:	$1 + 2 + 3 = \frac{1}{2} 3(3 + 1) = 6$	das stimmt auch

Mit dem Schritt 1 ist die Behauptung allerdings noch nicht bewiesen, es braucht noch den Schritt 2.

Schritt 2: Der Schluss von n auf n + 1.

Angenommen die Formel sei richtig für n. Zu zeigen ist, dass sie dann auch richtig ist für n + 1.

$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{1}{2} n(n + 1)$ das sei richtig; auf beiden Seiten wird n + 1 addiert

$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n + (n + 1) = \frac{1}{2} n(n + 1) + (n + 1)$ die rechte Seite wird umgeformt

$$\frac{1}{2} n(n + 1) + (n + 1) = \frac{1}{2} n(n + 1) + \frac{1}{2} 2(n + 1) = \frac{1}{2} (n + 1)(n + 2) = \frac{1}{2} (n + 1)((n + 1) + 1)$$

Das ist dieselbe Formel, nur ist n durch n + 1 ersetzt. Damit ist die Beweisführung abgeschlossen.

Beispiel 11

Behauptung: Die Anzahl Vertauschungsmöglichkeiten für n verschiedene Elemente beträgt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$

Schritt 1:

Die Behauptung stimmt für n = 1. Ein einziges Element kann nur auf eine einzige Art „vertauscht“ werden. 1! =1.

Die Behauptung stimmt auch für n = 2 und n =3 (siehe dazu auch Beispiel 7).

Schritt 2: Schluss von n auf n + 1.

Wir nehmen also an, die Behauptung sei richtig für n. Zu zeigen ist, dass sie dann auch für n + 1 richtig ist.

Gegeben sind also n verschiedene Elemente: $e_1, e_2, e_3, \ldots e_n$. Dann gibt es n! verschiedene Möglichkeiten, sie in einer Reihe anzuordnen. Beispielsweise so: $e_1 \; e_2 \; e_3 \; \ldots \; e_n$

oder so: $e_2 \; e_1 \; e_3 \; \ldots \; e_n$

oder so: $e_7 \; e_5 \; e_n \; \ldots \; e_{17}$

usw.

Nun kommt ein neues Element dazu: e_{n+1}. Zu jeder bereits vorhandenen Vertauschungsmöglichkeit kann dieses neue Element an n + 1 Stellen eingefügt werden. □ e_1 □ e_2 □ e_3 □ … □ e_n □. Durch Hinzufügen des neuen Elements erhält man also n + 1 mal mehr Vertauschungsmöglichkeiten.

$n! \cdot (n + 1) = (n + 1)!$ womit die Behauptung bewiesen ist.

Beispiel 12

Beweisen Sie durch vollständige Induktion: $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1)$

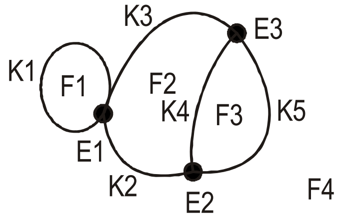
Beispiel 13

Beweisen Sie durch vollständige Induktion: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

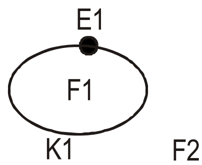
Beispiel 14

Der Eulersche Polyedersatz. Eine „Landkarte“ hat *Ecken*, *Flächen* und *Kanten*. Eine *Kante* ist die Verbindungslinie zweier *Ecken* oder eine Linie zu sich selber.

Die Figur nebenan hat drei Ecken, vier Flächen und 5 Kanten. Beachten Sie, dass das Äussere der Figur auch als Fläche zählt, in der Abbildung ist es die Fläche F4.



Dies ist die aller einfachste Figur. Sie hat lediglich eine Ecke, eine Kante und zwei Flächen.



Beweisen Sie durch vollständige Induktion den Eulrerschen Polyedersatz:

$$\boxed{\text{Anzahl Ecken} + \text{Anzahl Flächen} = \text{Anzahl Kanten} + 2}$$

Beispiel 15

1. Falte ein rechteckiges Blatt Papier einmal in der Mitte (Abb. 1).
2. Falte die Seite AB so, dass B auf die Mittellinie zu liegen kommt (Abb. 2).
3. Falte die Seite AD so, dass sie auf die Linie AP zu liegen kommt (Abb. 3)
4. Falte das Blatt wieder auseinander. Du erhältst drei Faltlinien (Abb. 4).
   Zeige, dass das Dreieck ABB’ gleichseitig ist.

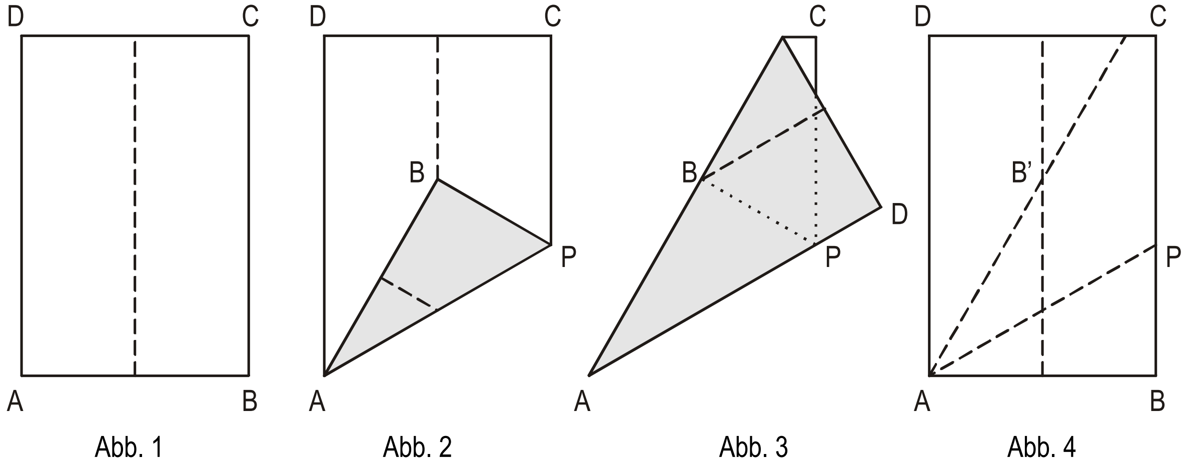


Abb. 1 Abb. 2 Abb. 3 Abb. 4