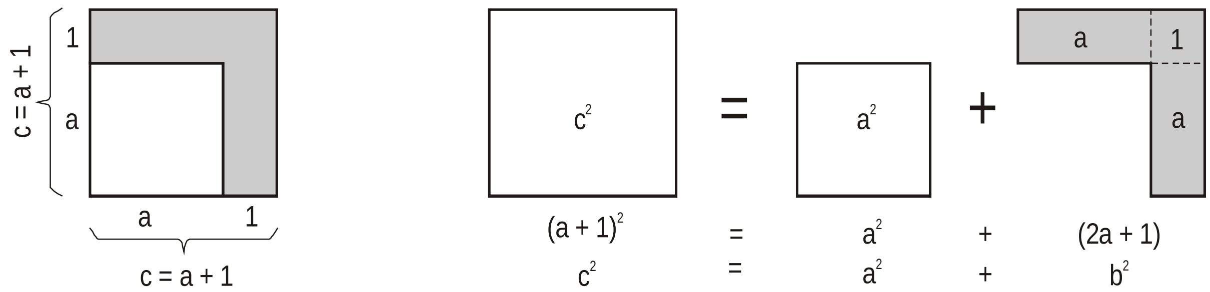
Pythagoreische Zahlentripel $a^2 + b^2 = c^2$

Methode 1

Diese Methode soll von Pythagoras persönlich stammen.

$$(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$$
$$(a + 1)^2 = a^2 + (2a + 1)$$
$$c^2 \quad = a^2 + \quad b^2$$



$c = a + 1$

$b^2 = 2a + 1$ b ist ganzzahlig, falls $2a + 1$ eine Quadratzahl ist

$2a + 1$ ist eine ungerade Zahl, also muss $2a + 1$ eine **ungerade Quadratzahl** sein.

$b^2 = 2a + 1$	b	$a = \frac{1}{2}(b^2 - 1)$	$c = a + 1$
9	3	4	5
25	5	12	13
49	7	24	25
81	9	40	41
101	11	50	51

Wir haben hier gesetzt $c = a + 1$. Also kann man nur Pythagoreische Tripel finden, bei denen c um 1 grösser ist als a.

Setzt man $c = a + 2$ und wendet man dieselbe Methode an, so findet man Zahlentripel bei denen c um 2 grösser ist als a.
Man geht aus von der Gleichung $(a + 2)^2 = a^2 + 4a + 4$.

In diesem Falle ist $b^2 = 4a + 4 = 2(a + 2)$. $4a + 4$ muss in diesem Fall eine **gerade Quadratzahl** sein.

Ähnliche Vorgehensweise für $(a + 3)^2 = a^2 + 6a + 9$

$6a + 9$ muss in diesem Fall eine **ungerade Quadratzahl** sein.

Methode 2

Man wählt zunächst zwei beliebige ganze Zahlen m und n mit $m > n$. Man setzt $a = m - n$ und $c = m + n$.

Das b kann nun nicht mehr beliebig gewählt werden.

Für b^2 muss gelten: $b^2 = c^2 - a^2 = (m + n)^2 - (m - n)^2 = m^2 + 2mn + n^2 - m^2 + 2mn - n^2 = 4mn$

Es ist also $b^2 = 4mn$ und $b = 2\sqrt{mn}$.

Damit b ganzzahlig ist, muss **m·n eine Quadratzahl** sein.

m·n	m	n	**a** = m – n	**b** = $2\sqrt{mn}$	**c** = m + n
4	4	1	3	4	5
9	9	1	8	6	10
16	16	1	15	8	17
16	8	2	6	8	10
25	25	1	24	10	26
49	49	1	48	14	50
64	64	1	63	16	65
64	32	2	30	16	34
64	16	4	12	16	20

Methode 3

Es handelt sich um die Methode des indischen Astronomen Brahmagupta (nach anderen Quellen stammt sie vom griechischen Mathematiker Diophant, 250 v. Chr.). Sie ist ebenfalls einfach und leicht zu verstehen.

Man wählt wieder zunächst zwei beliebige ganze Zahlen m und n mit $m > n$. Man setzt $a = m^2 - n^2$ und $c = m^2 + n^2$.

Das b kann nun nicht mehr beliebig gewählt werden.

Für b^2 muss gelten: $b^2 = c^2 - a^2 = (m^2 + n^2)^2 - (m^2 - n^2)^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 - m^4 + 2m^2n^2 - n^4 = 4m^2n^2 = (2mn)^2$

Es ist also $b^2 = (2mn)^2$ und $b = 2mn$.

m	n	**a** = $m^2 - n^2$	**b** = 2·m·n	**c** = $m^2 + n^2$
2	1	3	4	5
3	1	8	6	10
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	2	12	16	20
4	3	7	24	25
5	1	24	10	26
5	2	21	20	29
5	3	16	30	34
5	4	9	40	41