Rechengesetze

1. Rechengesetze für natürliche Zahlen

Es geht um die drei Gesetze **Kommutativgesetz**, **Assoziativgesetz** und **Distributivgesetz.** Eigentlich sind es ja fünf Gesetze. Es gilt nämlich das Kommutativgesetz der Addition, das Kommutativgesetz der Multiplikation, das Assoziativgesetz der Addition, das Assoziativ der Multiplikation und das Distributivgesetz.

Während die Kommutativgesetze und die Assoziativgesetze kaum Schwierigkeiten bereiten (sie verstehen sich beinahe von selbst), ist das Distributivgesetz schon recht schwierig zu verstehen.

Meist „gewöhnt“ man die Schüler an die Gesetze, insbesondere an das Distributivgesetz. Schüler arbeiten in der Regel ja nicht nach Rechengesetzen, sondern sie erfahren an Hand vieler Beispiele was erlaubt ist und was nicht, was „geht“ und was nicht.

Es lohnt sich aber doch, einen Blick auf diese Rechengesetze zu werfen.

Zunächst die Rechengesetze im Bereich der natürlichen Zahlen. Wir kennen also keine negativen Zahlen und keine Bruchzahlen.

Kommutativgesetz[1] der Addition

$3 + 2 = 2 + 3$

Allgemein gilt: $a + b = b + a$

Dass dies so ist kann man an Hand unzähliger Beispiele erhärten. Ein strenger mathematischer Beweis ist jedoch nicht möglich. Theoretisch denkbar wäre es ja, dass man eines Tages auf zwei Zahlen stösst, für die dieses Gesetz nicht gilt. Es bleibt uns also nur, dieses Gesetz als richtig anzunehmen. Solch grundlegend Gesetze nennt man **Axiome.**

Bei der Addition kommt es nicht auf die Reihenfolge der Summanden an, die Addition ist **kommutativ.** Das Kommutativgesetz der Addition ist ein **Axiom.**

Kommutativgesetz der Subtraktion: Gilt nicht!

$3 - 2 \neq 2 - 3$

Kommutativgesetz der Multiplikation

$3 \cdot 2 = 2 \cdot 3$

Allgemein gilt: $a \cdot b = b \cdot a$

Bei der Multiplikation kommt es nicht auf die Reihenfolge der Faktoren an, die Multiplikation ist **kommutativ.** Das Kommutativgesetz der Multiplikation ist ein **Axiom.**

Kommutativgesetz der Division: Gilt nicht!

$3 : 2 \neq 2 : 3$

Assoziativgesetz[2] der Addition

$$\begin{aligned}(3 + 2) + 7 &= 3 + (2 + 7)\\ 5 \quad + 7 &= 3 + \quad 9\\ 12 &= 12\end{aligned}$$

Die Klammerregel besagt, dass die Rechenoperationen innerhalb der Klammern „vorrangig“ auszuführen sind.

Allgemein gilt: $(a + b) + c = a + (b + c)$

---

[1] Ein deutsches Wort für *Kommutativgesetz* wäre *Vertauschungsgesetz*.
[2] Ein deutsches Wort für *Assoziativgesetz* wäre *Zusammenfassungsgesetz*.

Da es bei der Addition nicht darauf ankommt, wo man die Klammern setzt, lässt man sie auch ganz einfach weg und schreibt $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$

Bei der Addition kommt es nicht darauf an, wie man die einzelnen Summanden mit Klammern zusammenfasst, die Addition ist **assoziativ**. Das Assoziativgesetz der Addition ist ein **Axiom**.

Assoziativgesetz der Subtraktion: Gilt nicht!

$(13 - 5) - 2 \neq 13 - (5 - 2)$

Assoziativgesetz der Multiplikation

$$\begin{aligned} (3 \cdot 2) \cdot 7 &= 3 \cdot (2 \cdot 7) \\ 6 \cdot 7 &= 3 \cdot 14 \\ 42 &= 42 \end{aligned}$$

Die **Klammerregel** besagt, dass die Rechenoperationen innerhalb der Klammern „vorrangig“ auszuführen sind.

Allgemein gilt: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Da es bei der Multiplikation nicht darauf ankommt, wo man die Klammern setzt, lässt man sie auch ganz einfach weg und schreibt $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$

Bei der Multiplikation kommt es nicht darauf an, wie man die einzelnen Summanden mit Klammern zusammenfasst, die Multiplikation ist **assoziativ**. Das Assoziativgesetz der Multiplikation ist ein **Axiom**.

Assoziativgesetz der Division: Gilt nicht!

$(24 : 4) : 2 \neq 24 : (4 : 2)$

Das Distributivgesetz[3]

Zunächst eine Reihe von Beispielen was gilt und was nicht gilt[4].

$12 \cdot (3 + 2) = (12 \cdot 3) + (12 \cdot 2)$
$60 = 12 \cdot 5 = 36 + 24 = 60$ — die **Multiplikation** ist **linksseitig distributiv** in Bezug auf die **Addition**.

$12 \cdot (3 - 2) = (12 \cdot 3) - (12 \cdot 2)$
$12 = 12 \cdot 1 = 36 - 24 = 12$ — die **Multiplikation** ist **linksseitig distributiv** in Bezug auf die **Subtraktion**.

$(3 + 2) \cdot 12 = (3 \cdot 12) + (2 \cdot 12)$
$60 = 5 \cdot 12 = 36 + 24 = 60$ — die **Multiplikation** ist **rechtsseitig distributiv** in Bezug auf die **Addition**.

$(3 - 2) \cdot 12 = (3 \cdot 12) - (2 \cdot 12)$
$12 = 1 \cdot 12 = 36 - 24 = 12$ — die **Multiplikation** ist **rechtsseitig distributiv** in Bezug auf die **Subtraktion**.

$12 + (3 \cdot 2) \neq (12 + 3) \cdot (12 + 2)$
$18 = 12 + 6 \neq 15 \cdot 14 = 210$ — die **Addition** ist **<u>nicht</u> linksseitig distributiv** in Bezug auf die **Multiplikation**.

$12 + (3 - 2) \neq (12 + 3) - (12 + 2)$
$13 = 12 + 1 \neq 15 - 14 = 1$ — die **Addition** ist **<u>nicht</u> linksseitig distributiv** in Bezug auf die **Subtraktion**.

$(3 \cdot 2) + 12 \neq (3 + 12) \cdot (2 + 12)$
$18 = 6 + 12 \neq 15 \cdot 14 = 210$ — die **Addition** ist **<u>nicht</u> rechtsseitig distributiv** in Bezug auf die **Multiplikation**.

$(3 - 2) + 12 \neq (3 + 12) - (2 + 12)$
$13 = 1 + 12 \neq 15 - 14 = 1$ — die **Addition** ist **<u>nicht</u> rechtsseitig distributiv** in Bezug auf die **Subtraktion**.

$30 : (3 + 2) \neq (30 : 3) + (30 : 2)$
$6 = 30 : 5 \neq 10 + 15 = 25$ — die **Division** ist **<u>nicht</u> linksseitig distributiv** in Bezug auf die **Addition**.

$(9 + 12) : 3 = (9 : 3) + (12 : 3)$
$7 = 21 : 3 = 3 + 4 = 7$ — die **Division** ist **rechtsseitig distributiv** in Bezug auf die **Addition**.

$(18 - 12) : 3 = (18 : 3) - (12 : 3)$
$2 = 6 : 3 = 6 - 4 = 2$ — die **Division** ist **rechtsseitig distributiv** in Bezug auf die **Subtraktion**.

---

[3] Ein deutsches Wort für *Distributivgesetz* wäre *Verteilungsgesetz*.

[4] Aus didaktischen Gründen muss neben dem „was gilt“ immer auch gezeigt werden „was nicht gilt“.

Zusammenfassung:

Es gibt also **nur ein Distributivgesetz: Die Multiplikation ist distributiv in Bezug auf Addition und Subtraktion**, und zwar linksseitig wie rechtsseitig (da die Multiplikation ja kommutativ ist).

$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ $\qquad$ $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

$a \cdot (b - c) = (a \cdot b) - (a \cdot c)$ $\qquad$ $(a - b) \cdot c = (a \cdot c) - (b \cdot c)$

Klammernregel (Klammernsparprogramm): Um die Darstellung übersichtlicher zu gestalten ist man übereingekommen, bei fehlenden Klammern die Multiplikationen und Divisionen vorrangig zu behandeln. **„Punkt vor Strich".**

Bei der Darstellung mit Buchstaben anstelle von Zahlen verzichtet man auch auf den Punkt als Multiplikationszeichen und damit erhält das Distributivgesetz seine endgültige Form:

$a(b + c) = ab + ac$ $\qquad$ $(a + b)c = ac + bc$

Das Distributivgesetz kann nun mehrfach angewendet werden:

$a(b + (c + d)) = ab + a(c + d) = ab + ac + ad$

$(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d = ac + bc + ad + bd$ $\qquad$ (das **jedes-mit-jedem-Gesetz**)

2. Ganze Zahlen (negative und positive Zahlen)

Die Einführung negativer Zahlen kann auf verschiedene Weise geschehen und ich denke man sollte auch verschiedene Interpretationen negativer Zahlen verwenden.

Zur Einführung negativer Zahlen bietet sich zunächst die **Temperaturskala** an, es gibt positive und negative Temperaturen. Dann das **Bankkonto:** Guthaben ist positiv, Schulden negativ (auch wenn die Bank hier anstelle eines Minuszeichens rote Farbe verwendet). Man kann auch die **Zahlengerade** zur Einführung negativer Zahlen verwenden. Besonders würde ich die **Additionsmaschine** empfehlen.

Zunächst sei darauf hingewiesen, dass in zwei grundsätzlich verschiedenen Bedeutungen verwenden: Minuszeichen **als Vorzeichen** und **als Operationszeichen.**

Taschenrechner machen hier einen Unterschied.

Das Minuszeichen als Vorzeichen erhält man meist mit der Taste $\boxed{+/-}$, das Operationszeichen „Minus" mit der Taste $\boxed{-}$.

Die Tastenfolge $\boxed{7}\ \boxed{-}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$ funktioniert, man erhält 4 als Ergebnis,

die Tastenfolge $\boxed{-}\ \boxed{3}\ \boxed{+}\ \boxed{7}\ \boxed{=}$ funktioniert bei manchen Rechnern <u>nicht</u>, man erhält eine Fehlermeldung,

Die Tastenfolge $\boxed{+/-}\ \boxed{3}\ \boxed{+}\ \boxed{7}\ \boxed{=}$ funktioniert hingegen schon, man erhält wieder 4 als Ergebnis.

Um zwischen Minus als Vorzeichen und Minus als Operationszeichen zu unterscheiden, verwenden viele Lehrbücher Klammern. Um dem Klammernwirrwarr zu entgehen, kann man auch die Minus- und die Pluszeichen hochstellen.

Beispiele: $\quad (-3) + (+7) = (+4) \qquad {}^-3 + {}^+7 = {}^+4$

$\quad (+7) - (+3) = (+4) \qquad {}^+7 - {}^+3 = {}^+4$

Dazu kommt (für die Schüler zunächst verwirrend) dass man die Pluszeichen als Vorzeichen weglässt. Ist also nichts anderes vermerkt, dann gilt das Vorzeichen +.

Nun zur eigentlichen Einführung der negativen Zahlen.

Repräsentation ganzer Zahlen durch die Temperaturskala

Die Temperatur steigt von (+12) Grad um (+7) Grad:	(+12) + (+7) = (+19)	Das Pluszeichen steht hier für „steigt“.
Die Temperatur sinkt von (+12) Grad um (+7) Grad:	(+12) – (+7) = (+5)	Das Minuszeichen steht hier für „sinkt“.
Die Temperatur steigt von (+12) Grad um (–7) Grad:	(+12) + (–7) = (+5)	Die Temperatur „sinkt um (+7) Grad“ ist gleichbedeutend mit „die Temperatur steigt um (–7) Grad“.
Die Temperatur sinkt von (+12) Grad um (–7) Grad:	(+12) – (–7) = (+19)	ist schwieriger einzusehen.

Vielleicht hilft folgendes: Wenn man berechnet 12 (– 7), so fragt man ja, wie viel muss ich zu 7 hinzuzählen um 12 zu erhalten. Die Antwort ist 5.
Oder: $7 + x = 12 \rightarrow x = 5$

Um (+12) – (–7) zu berechnen, muss man also fragen, um wie viel Grad muss es von (–7) Grad wärmer werden, damit es (+12) hat? Die Antwort lautet (+19) Grad. Also (+12) – (–7) = (+19).
Oder: $(-7) + x = (+12) \rightarrow x = (+19)$

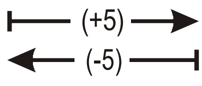
Repräsentation ganzer Zahlen durch Guthaben und Schulden

(+12) + (+7) = (+19)	Habe ich 12 Franken und es kommen 7 Franken dazu, so habe ich 19 Franken.
(+12) – (+7) = (+5)	Habe ich 12 Franken und es kommen 7 Franken weg, so habe ich noch 5 Franken. Oder: $7 + x = 12 \rightarrow x = 5$
(+12) + (–7) = (+5)	Habe ich 12 Franken und es kommen 7 Franken Schulden hinzu, so bleiben mir noch 5 Franken.
(+12) – (–7) = (+19)	Ist wieder der schwierige Fall. Ist etwa so zu lösen: Ich habe 7 Franken Schulden. Wie viele Franken muss mir der Vater geben, damit ich ein Vermögen von 12 Franken besitze? Antwort: 19 Franken. Oder: $(-7) + x = (+12) \rightarrow x = (+19)$

Der Zahlenstrahl

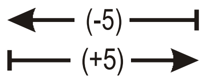
Zahlen werden durch Vektoren dargestellt.

Zahl (+5)
Gegenzahl (–5)

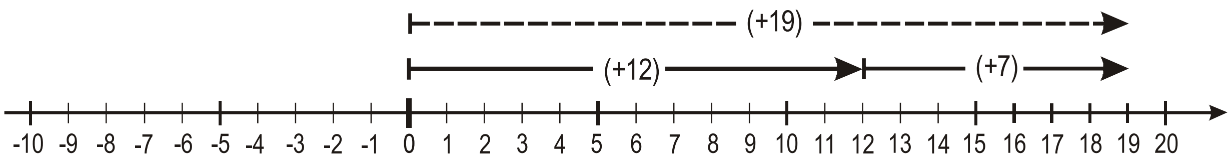


Und umgekehrt:

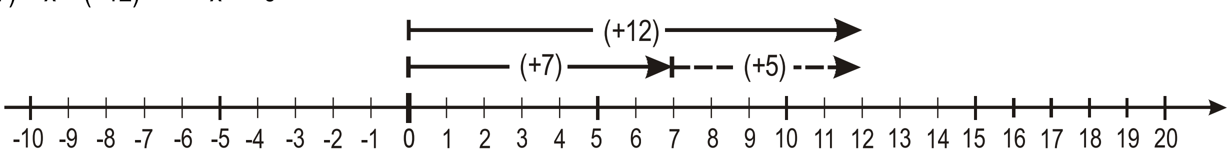
Zahl (–5)
Gegenzahl (+5)



$(+12) + (+7) = x \rightarrow x = 19$

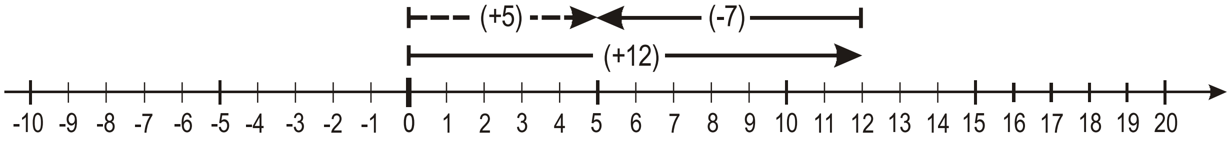


$(+12) - (+7) = x$
$(+7) + x = (+12) \rightarrow x = +5$



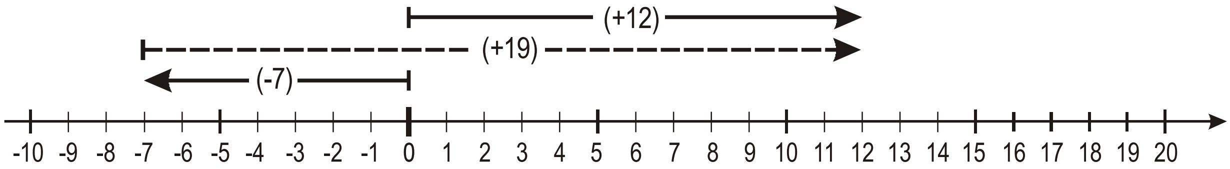
Oder: Anstelle zu subtrahieren wird die **Gegenzahl addiert.**

(+12) – (+7) = (+12) + (–7) = +5



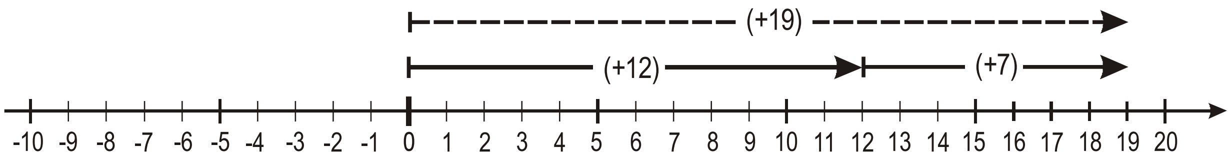
(+12) – (–7) = x

(–7) + x = (+12)



Oder:

(+12) – (–7) = (+12) + (+7)



Der langen Rede kurzer Sinn:

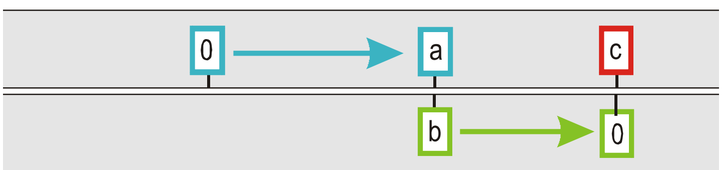
+ + → +
+ – → –
– + → –
– – → +

Die Additionsmaschine

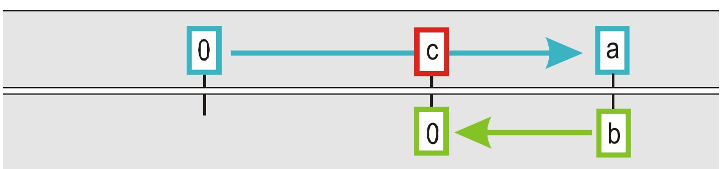
Ähnlich wie früher beim logarithmischen Rechenstab benutzt man zwei Skalen, die man gegenseitig verschieben kann. (Kopiervorlage siehe Seite 8.)

Das Prinzip:

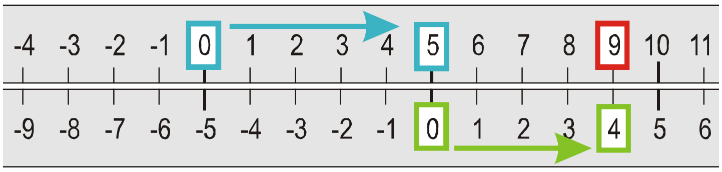
a + b = c



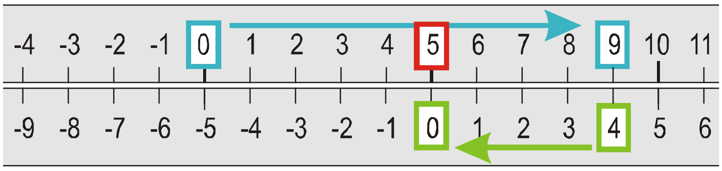
a – b = c



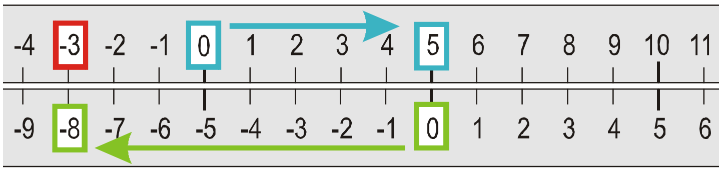
5 + 4 = 9



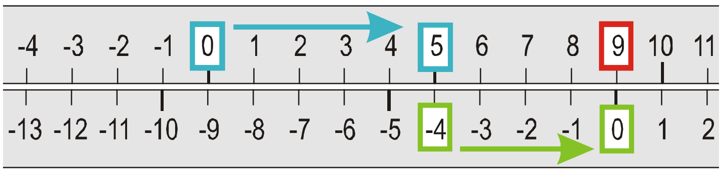
9 – 4 = 5



9 – 4 = 5



5 – (–4) = 9



Multiplikation und Division ganzer Zahlen

Manches ist einleuchtend: $(+12) \cdot (+3) = (+36)$

$(+12) \cdot (-3) = (-36)$

$(-12) \cdot (+3) = (-36)$

Schwieriger zu verstehen ist: $(-12) \cdot (-3) = (+36)$

Division: $(+12) : (+3) = (+4)$

$(-12) : (-3) = (+4)$ (man kann von (–12) vier mal (–3) wegnehmen)

Schwieriger zu verstehen ist: $(-12) : (+3) = (-4)$

$(+12) : (-3) = (-4)$

Zu beweisen ist: $(-12) \cdot (-3) = (+36)$

$$
\begin{aligned}
(-12) \cdot (-3) &= x && \text{zu beiden Seiten } (-12) \cdot (+3) \text{ addieren} \\
(-12) \cdot (-3) + (-12) \cdot (+3) &= x + (-12) \cdot (+3) && \text{auf der linken Seite } (-12) \text{ ausklammern} \\
(-12) \cdot ((-3) + (+3)) &= x + (-36) \\
(-12) \cdot (0) &= x - (+36) \\
0 &= x - (+36) \\
\underline{\underline{x = 36}} & && \text{was zu beweisen war}
\end{aligned}
$$

Der langen Rede kurzer Sinn:

$+ \cdot + \rightarrow +$	$+ : + \rightarrow +$
$+ \cdot - \rightarrow -$	$+ : - \rightarrow -$
$- \cdot + \rightarrow -$	$- : + \rightarrow -$
$- \cdot - \rightarrow +$	$- : - \rightarrow +$

Der Einsatz von Tabellen gibt weitere Erkenntnisse:

Summand

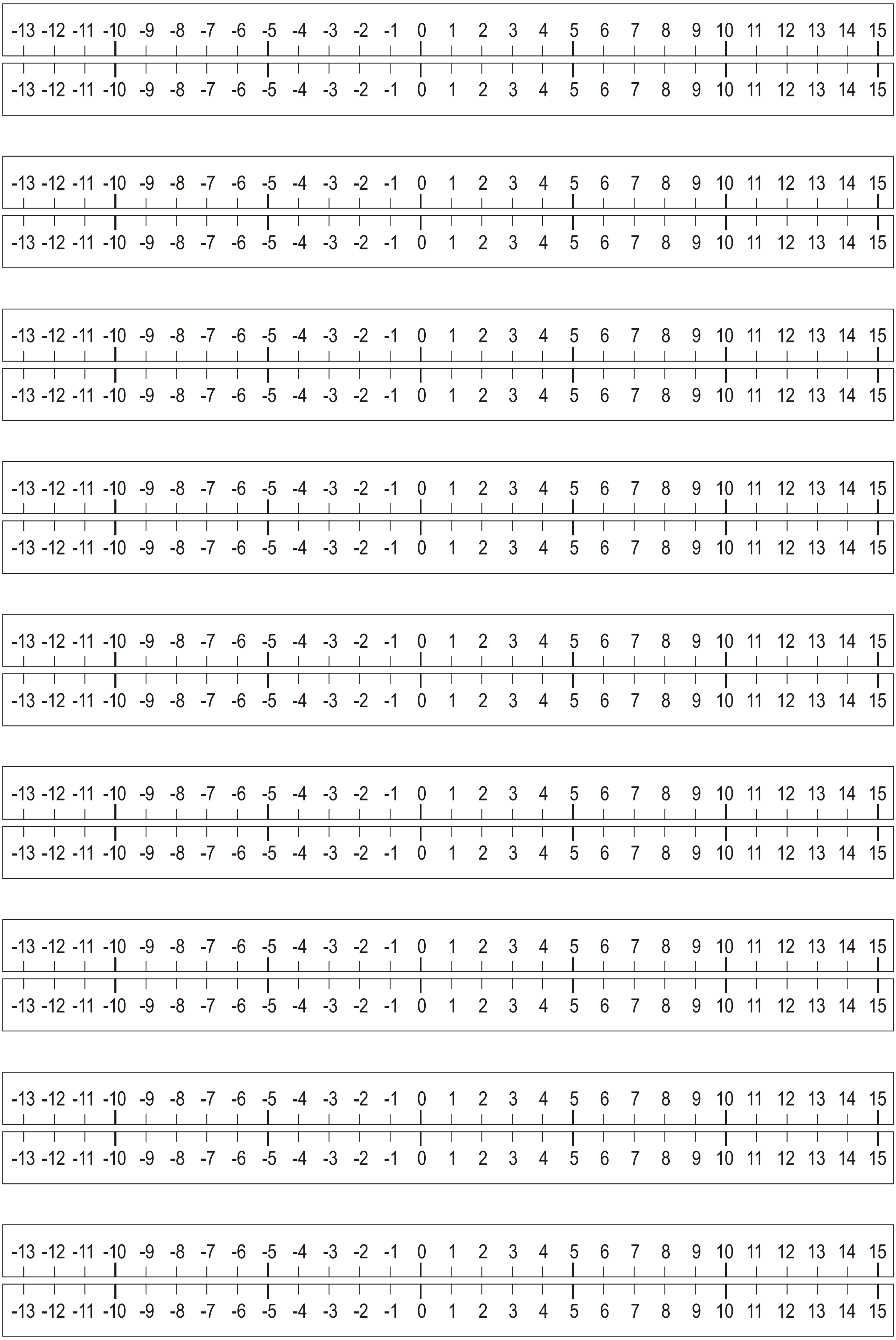
	+	–3	–2	–1	0	1	2	3
	–3	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0
	–2	–5	–4	–3	–2	–1	0	1
	–1	–4	–3	–2	–1	0	1	2
Summand	0	–3	–2	–1	0	1	2	3
	1	–2	–1	0	1	2	3	4
	2	–1	0	1	2	3	4	5
	3	0	1	2	3	4	5	6

Subtrahend

	–	–3	–2	–1	0	1	2	3
	–3	0	–1	–2	–3	–4	–5	–6
	–2	1	0	–1	–2	–3	–4	–5
	–1	2	1	0	–1	–2	–3	–4
Minuend	0	3	2	1	0	–1	–2	–3
	1	4	3	2	1	0	–1	–2
	2	5	4	3	2	1	0	–1
	3	6	5	4	3	2	1	0

Faktor

	·	–3	–2	–1	0	1	2	3
	–3	9	6	3	0	–3	–6	–9
	–2	6	4	2	0	–2	–4	–6
	–1	3	2	1	0	–1	–2	–3
Faktor	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	–3	–2	–1	0	1	2	3
	2	–6	–4	–2	0	2	4	6
	3	–9	–6	–3	0	3	6	9


-13 -12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
-13 -12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
-13 -12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
-13 -12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
-13 -12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
-13 -12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
-13 -12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
-13 -12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
-13 -12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
-13 -12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
-13 -12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
-13 -12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
-13 -12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
-13 -12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
-13 -12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
-13 -12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
-13 -12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
-13 -12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15